

**Universidad
Autónoma
Metropolitana**



Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
Maestría en Ciencias en Ingeniería Electromagnética

FORMALISMO VARIACIONAL EN EL MODELADO Y
CONTROL DE SISTEMAS DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA

Idónea Comunicación de Resultados que presenta:

Ing. Victor Rolando Jara González

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

Director:

Dr. César Simón López Monsalvo

Codirector:

M. en C. Felipe de Jesús González Montañez

Ciudad de México, marzo de 2021

A mi padre y a mi bisabuela Mimimi, que desde el cielo seguirán siempre en mi corazón.

A mi madre, por todo su amor y dedicación.

A mi hermana, por todo su cariño incondicional.

A mis abuelos, por ser como mis padres y darme siempre el amor más grande del mundo.

Ing. Victor Rolando Jara González,
Ciudad de México, marzo de 2021

Agradecimientos

A Dios, por ser mi creador, por estar siempre cuando lo necesito como guía y luz en mi camino, por enseñarme cada día que la **fe** es la fuerza más grande del universo.

A toda mi familia, por darme siempre todo su apoyo y amor, esa que a pesar de la distancia ha estado ahí, en todo momento, incluso cuando nos derrumbamos por la tristeza y la nostalgia. Hoy no se encuentran presentes físicamente mi papá *Oswaldo Ulises Jara García* y mi bisabuela *Santa Apolonia Hernández Pérez (Mimimi)*, pero en donde estén, que seguro estoy es en el cielo, verán otro triunfo del cual ellos son fieles protagonistas, y lo serán siempre!

A mis asesores, *Dr. César Simón López Monsalvo* y *M. en C. Felipe de Jesús González Montañez*, por aportarme tanto conocimiento y ser esos incansables seres humanos que saben entender, que saben enseñar! Sin su apoyo académico y moral el trabajo hubiese sido inalcanzable. Estoy eternamente agradecido mis capitanes!... y amigos!

A mis sinodales, *Dr. Alessandro Bravetti*, *Dr. Alberto Rubio*, *Dr. Francisco Beltrán* y *Dr. César López*, por la detallada revisión de este trabajo convertida en comentarios enriquecedores.

A todos los profesores del posgrado, por ser ejemplos en la preparación académica, por enseñarnos con sabiduría lo duro que es ser estudiantes de una maestría de alto nivel. Muchas gracias en nombre de todo el equipo de cubanos por acogernos en su hermoso país y ser excelentes seres humanos... Especialmente al *Dr. Rafael Escarela Pérez*, por contestarme el primer correo que significó el comienzo de muchas nuevas vidas! Gracias mi amigo!

A mis hermanitos electromagnéticos, por estar siempre presentes como un equipo unido! También incluyo a todos los colegas del LUE, siempre tan hospitalarios y atentos!... Especialmente a *José Jiménez* (Chepito); carnal, muchas gracias por todo tu apoyo en estos años duros, en lo académico y en lo personal, siempre presente sin importar la hora!

A mi equipo de cubanos, una gran familia que hemos formado en la Ciudad de México, siempre pa' lo que sea!... Especialmente a *Fernando Pérez Muñoz*, mi hermano y mejor amigo!

A mi novia, *Licet Mena Valdés*, por su cariño y amor en todo momento. Te amo!

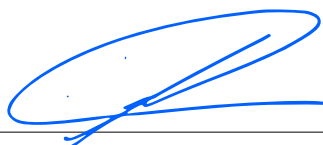
A CONACYT, por proporcionarme el financiamiento para estudiar en un país hermoso lleno de oportunidades, específicamente en la **UAM Azcapotzalco** junto a profesores excepcionales en un posgrado de primer nivel.

No. CVU: 943847.

Declaratoria

- Yo, Dr. César Simón López Monsalvo, declaro que aprobé el contenido del presente reporte de Idónea Comunicación de Resultados y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Firma



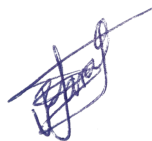
- Yo, M. en C. Felipe de Jesús González Montañez, declaro que aprobé el contenido del presente reporte de Idónea Comunicación de Resultados y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Firma



- Yo, Ing. Victor Rolando Jara González, doy mi autorización a la Coordinación de Servicios de Información de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, para publicar el presente documento en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional de UaM Azcapotzalco.

Firma



Fecha

12 de marzo de 2021

Resumen

Este trabajo trata sobre la técnica de control Lagrangianos controlados en dos sistemas de levitación magnética, siendo estos, el objeto de estudio fundamental. Se hizo un análisis de la dinámica natural de tres sistemas mecánicos; un péndulo simple, dos péndulos acoplados por una viga fija y un péndulo invertido sobre un carro, el cual, sirvió para comprender desde un punto de vista físico-matemático la presentación del formalismo Lagrangiano. Este análisis en sistemas mecánicos fue la base en el estudio de la dinámica natural de los sistemas de levitación magnética tratados.

También se realizó un análisis geométrico de estabilidad, tanto para los sistemas mecánicos como para los sistemas de levitación magnética; este constituye la primera novedad como resultado del trabajo.

La presentación de la técnica de control Lagrangianos controlados fue explicada detalladamente tomando como ejemplo el sistema del péndulo invertido sobre un carro, para luego ser implementada en los sistemas de levitación magnética. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, demostrándose con ellos, que esta técnica de control tiene sentido en sistemas de levitación magnética, hasta ahora simples. Desde el punto de vista matemático, el establecimiento de una ley de control en estos sistemas de levitación magnética, garantiza su estabilidad en el entendido que la dinámica controlada será igual a la deseada.

Abstract

In this thesis he addressed the controlled Lagrangian control technique in two magnetic levitation systems, these being the fundamental object of study. An analysis of the natural dynamics of three mechanical systems was made; a simple pendulum, two pendulums attached to a fixed beam and an inverted pendulum on a cart, which served to understand from a physical-mathematical point of view the presentation of the Lagrangian formalism. This analysis in mechanical systems was the basis in the study of the natural dynamics of the magnetic levitation systems treated.

A geometrical stability analysis was also carried out, both for the mechanical systems and for the magnetic levitation systems; this constitutes the first novelty as a result of the work.

The presentation of the controlled Lagrangian control technique was explained in detail, taking as an example the inverted pendulum system on the cart, to later be implemented in magnetic levitation systems. The results obtained were satisfactory, demonstrating with them that this control technique makes sense in magnetic levitation systems, until now simple. From the mathematical point of view, the establishment of a control law in these magnetic levitation systems guarantees their stability in the understanding that the controlled dynamics will be equal to the desired one.

Contenido

Agradecimientos	II
Declaratoria	III
Resumen	IV
Abstract	V
Contenido	VI
Índice de Figuras	VIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.1.1. Lagrangianos controlados	2
1.1.2. Sistemas particulares de levitación magnética	2
1.1.3. Estado del arte	3
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
2. Marco teórico	5
2.1. Formalismo Lagrangiano	5
2.2. Funciones de energía	7
2.3. Energía del campo magnético	8
2.4. Consideración de disipación	9
2.5. Acople de sistemas	10
2.5.1. Coeficiente de elasticidad	10
2.5.2. Truncamiento de la Serie de Taylor	11
2.5.3. Ajuste de curvas exponenciales	11
2.6. Análisis geométrico de estabilidad	12
2.6.1. Descripción del método	13
2.7. Grupos y álgebra de Lie	14
2.7.1. Ejemplo de aplicación	16
3. Sistemas mecánicos	18
3.1. Péndulo simple	18
3.1.1. Simulación de la dinámica propia del sistema	20
3.2. Dos péndulos acoplados por una viga fija	21

3.2.1.	Simulación de la dinámica propia del sistema	22
3.2.2.	Análisis geométrico de estabilidad	24
3.3.	Péndulo invertido sobre un carro	25
3.3.1.	Simulación de la dinámica propia del sistema	26
3.3.2.	Análisis geométrico de estabilidad	28
4.	Sistemas de levitación magnética	31
4.1.	Anillo de Thomson	31
4.1.1.	Construcción del Lagrangiano natural del sistema	34
4.1.2.	Obtención de las ecuaciones de movimiento	36
4.1.3.	Simulaciones de la dinámica propia del sistema	38
4.1.4.	Análisis geométrico de estabilidad	45
4.2.	Esfera con una bobina superior	47
4.2.1.	Construcción del Lagrangiano natural del sistema	49
4.2.2.	Obtención de las ecuaciones de movimiento	51
4.2.3.	Simulaciones de la dinámica propia del sistema	52
4.2.4.	Análisis geométrico de estabilidad	56
5.	Lagrangianos controlados en sistemas de levitación magnética	58
5.1.	Moldeado de energía cinética	58
5.1.1.	División en direcciones de simetrías	61
5.1.2.	Hipótesis para la obtención del Lagrangiano controlado	63
5.1.3.	Lagrangiano controlado del sistema	69
5.1.4.	Establecimiento de la ley de control	70
5.1.5.	Simulación de la dinámica controlada	72
5.2.	Anillo de Thomson	74
5.2.1.	Lagrangiano controlado del sistema	76
5.2.2.	Establecimiento de la ley de control	79
5.2.3.	Simulación de la dinámica controlada	81
5.2.4.	Nueva factorización del espacio de configuración	84
5.3.	Esfera con una bobina superior	88
5.3.1.	Lagrangiano controlado del sistema	90
5.3.2.	Establecimiento de la ley de control	92
5.3.3.	Simulación de la dinámica controlada	94
6.	Resumen de resultados	97
7.	Conclusiones y trabajos futuros	99
7.1.	Conclusiones	99
7.2.	Trabajos futuros	100
	Referencias	101

Índice de Figuras

2.1. Característica exponencial de la inductancia en el sistema de levitación magnética conformado por una esfera con una bobina superior.	12
2.2. Divergencia exponencial de geodésicas.	14
2.3. Reacomodo de puntos en la variedad diferencial G	15
2.4. Reacomodo de campos vectoriales en la variedad diferencial G	15
2.5. Espacios tangentes a las matrices de rotación en un círculo unitario.	17
3.1. Péndulo simple.	19
3.2. Referencias de la posición angular del péndulo simple.	20
3.3. Posición angular oscilatoria del péndulo simple.	20
3.4. Posición angular del péndulo simple bajo el efecto de la fricción.	21
3.5. Dos péndulos acoplados.	21
3.6. Posición angular oscilatoria del péndulo izquierdo.	23
3.7. Posición angular oscilatoria del péndulo derecho.	23
3.8. Posición angular del péndulo izquierdo bajo el efecto de la fricción.	24
3.9. Posición angular del péndulo derecho bajo el efecto de la fricción.	24
3.10. Péndulo invertido en un carro.	25
3.11. Posición angular del péndulo invertido.	26
3.12. Posición horizontal del carro.	27
3.13. Posición angular del péndulo invertido bajo el efecto de la fricción.	27
3.14. Posición horizontal del carro bajo el efecto de la fricción.	28
3.15. Sección de la curvatura de movimiento en el sistema del péndulo invertido en un carro.	29
3.16. Densidad del escalar de Ricci en el sistema del péndulo invertido en un carro.	30
4.1. Anillo de Thomson.	32
4.2. Comportamiento de los campos magnéticos en el anillo de Thomson.	33
4.3. Comportamiento natural de la altura del anillo de Thomson.	39
4.4. Comportamiento natural de la corriente por la bobina. Sistema del anillo de Thomson.	40
4.5. Comportamiento natural de la corriente inducida en el anillo de Thomson.	40
4.6. Plano de fase correspondiente a la dinámica natural del anillo de Thomson.	41
4.7. Comportamiento de la altura del anillo de Thomson considerando fricción.	41
4.8. Comportamiento de la corriente por la bobina considerando fricción. Sistema del anillo de Thomson.	42
4.9. Comportamiento de la corriente inducida en el anillo de Thomson considerando fricción.	42
4.10. Plano de fase correspondiente a la dinámica del anillo de Thomson considerando fricción.	43

4.11. Comportamiento de la altura del anillo de Thomson considerando fricción y disipación en el circuito.	43
4.12. Comportamiento de la corriente por la bobina considerando fricción y disipación. Sistema del anillo de Thomson.	44
4.13. Comportamiento de la corriente inducida en el anillo de Thomson considerando fricción y disipación.	44
4.14. Plano de fase correspondiente a la dinámica del anillo de Thomson considerando fricción y disipación.	45
4.15. Sección de la curvatura de movimiento en el sistema del anillo de Thomson. . .	46
4.16. Densidad del escalar de Ricci en el sistema del anillo de Thomson.	47
4.17. Esfera con una bobina superior.	47
4.18. Comportamiento de los campos magnéticos en el sistema de la esfera con una bobina superior.	49
4.19. Comportamiento natural de la altura de la esfera.	53
4.20. Comportamiento natural de la corriente por la bobina. Sistema de la esfera con una bobina superior.	53
4.21. Plano de fase correspondiente a la dinámica natural de la esfera con una bobina superior.	54
4.22. Comportamiento de la altura de la esfera considerando disipación en el circuito. .	54
4.23. Comportamiento de la corriente por la bobina considerando disipación. Sistema de la esfera con una bobina superior.	55
4.24. Plano de fase correspondiente a la dinámica de la esfera considerando disipación. .	55
4.25. Sección de la curvatura de movimiento en el sistema de la esfera con una bobina superior.	56
4.26. Densidad del escalar de Ricci en el sistema de la esfera con una bobina superior. .	57
5.1. Representación del espacio de posibles configuraciones. Sistema del péndulo invertido en un carro.	59
5.2. Representación del espacio de estados TQ.	60
5.3. Espacio total del sistema o haz fibrado principal.	63
5.4. Descomposición del haz tangente TQ considerando la dirección horizontal \mathfrak{D} . . .	65
5.5. Posición angular controlada del péndulo invertido.	72
5.6. Evolución de la posición del carro.	73
5.7. Plano de fase correspondiente al péndulo invertido controlado.	73
5.8. Plano de fase correspondiente al carro que conduce al péndulo invertido controlado.	74
5.9. Representación del espacio de posibles configuraciones del sistema. Anillo de Thomson.	75
5.10. Altura controlada del anillo de Thomson.	82
5.11. Corriente por la bobina en el sistema controlado del anillo de Thomson.	82
5.12. Plano de fase correspondiente al anillo de Thomson controlado.	83
5.13. Altura controlada del anillo de Thomson teniendo en cuenta una ganancia menor. .	83
5.14. Altura controlada del anillo de Thomson considerando nueva factorización de Q . .	86
5.15. Corriente por la bobina en el sistema controlado del anillo de Thomson considerando nueva factorización de Q	86
5.16. Plano de fase correspondiente al anillo de Thomson controlado considerando nueva factorización de Q	87

5.17. Altura controlada del anillo de Thomson considerando nueva factorización de Q y otra condición inicial.	87
5.18. Representación del espacio de posibles configuraciones del sistema. Esfera con una bobina superior.	88
5.19. Altura controlada de la esfera.	95
5.20. Corriente por la bobina en el sistema controlado de la esfera.	95
5.21. Plano de fase correspondiente a la esfera controlada.	96
5.22. Altura controlada de la esfera teniendo en cuenta una ganancia menor.	96

Capítulo 1.

Introducción

En pleno siglo XXI el uso de la energía eléctrica, particularmente en sistemas de levitación magnética, tiene un constante crecimiento paralelo al desarrollo tecnológico que se fomenta en la sociedad. La necesidad de una explotación eficiente de estos sistemas, ha propiciado el desarrollo de tecnologías en su control, basadas fundamentalmente en el control clásico.

Desde el punto de vista ingenieril, la levitación magnética se ha consolidado como una manera de reducir el consumo energético a varios niveles, debido a su particularidad de permitir el desplazamiento relativo entre dos superficies con ausencia de fricción, la cual es considerada como la principal responsable de las pérdidas de energía en sistemas electromecánicos como trenes, rodamientos, etc. [1]. Estos sistemas también se asocian con dispositivos que hacen uso del efecto Meissner en materiales superconductores para repeler las líneas de campo magnético [2].

Existen otras técnicas de control que se han desarrollado en los últimos años, primeramente con carácter matemático y luego, aplicables a diversos sistemas. Una de ellas es la técnica de control mediante Lagrangianos controlados, presentada en el año 2000 por Bloch *et al.* [3], trabajo que ha servido de base en varias investigaciones incluso con fines prácticos. En este trabajo tomamos como punto de referencia la metodología propuesta por Bloch, para aplicarla a dos sistemas particulares de levitación magnética.

Aunque los dos sistemas de levitación magnética que tratamos tienen una dinámica sencilla, la cual ya ha sido estudiada por varios autores, no se ha realizado un análisis sobre la posible aplicación en ellos, de la técnica de control mediante Lagrangianos controlados. Las investigaciones fruto de este trabajo son pioneras en este sentido, por lo cual, constituye la *originalidad* del mismo, al presentar formalmente esta técnica de control en el sistema del anillo de Thomson y de una esfera con una bobina superior. Se espera que en los próximos años esta técnica de control tenga mayor aplicación en sistemas más complejos, contribuyendo así al desarrollo científico y tecnológico en la sociedad.

Otra novedad que se presenta en el trabajo es el análisis geométrico de estabilidad, tanto en los dos sistemas de levitación magnética mencionados como en tres sistemas mecánicos. Paralelo a la presentación de la técnica de control mediante Lagrangianos controlados, esta forma de analizar estabilidad se hace desde el punto de vista geométrico, como su nombre indica, lo que implica llevar de la mano conceptos de geometría diferencial, la cual, resulta compleja sobre todo para personas que no tengan conocimientos en este sentido; fue un reto cumplido que sin dudas, ha generado conocimientos y que permitirá en un futuro seguir aplicando esta técnica de análisis.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Lagrangianos controlados

Entendemos al Lagrangiano controlado como una técnica de control que se puede aplicar a un sistema dinámico que evoluciona de manera propia. El objetivo de esta técnica es controlar al sistema atendiendo a intereses particulares, de tal forma, que no se afecte la dinámica natural del sistema.

De manera esquemática, el método de Lagrangianos controlados consiste, en considerar la geometrización del espacio de configuración \mathcal{M} . Esto se logra promoviendo la matriz de inercia (masa) en el Lagrangiano a un tensor métrico para el espacio de configuración. El caso que se considera en la literatura es aquel en que el espacio de configuración se puede expresar como un haz fibrado principal cuya base es un espacio de formas y su fibra un grupo de simetría que “preserva las formas”. De esta manera, los movimientos posibles en el espacio de configuración siempre son combinaciones de cambios de forma y “re-orientaciones”. A los primeros se les llama movimientos horizontales mientras que a los segundos, verticales. Una descomposición así define un objeto geométrico conocido como conexión. Una conexión en un espacio nos brinda una noción de transporte paralelo. La métrica entonces se descompone en una parte horizontal y una vertical definidas naturalmente por el sistema. El formalismo consiste en dos piezas independientes y complementarias. La primera consiste en modificar la acción de la métrica en vectores tangentes a \mathcal{M} , dejando las direcciones horizontal y vertical, así como la energía potencial del sistema, fijos, para lograr las trayectorias deseadas. La segunda parte consiste en moldear la función de energía potencial dejando fija la métrica controlada con el fin de garantizar estabilidad de las trayectorias deseadas del sistema. Con esto, se obtiene un nuevo Lagrangiano en el que las fuerzas resultantes son las acciones de control, como por ejemplo fuentes de alimentación, y las ecuaciones de movimiento producen la dinámica deseada.

1.1.2. Sistemas particulares de levitación magnética

Tomamos como objeto de estudio fundamental a dos sistemas con campo magnético, específicamente los sistemas de levitación magnética con alto grado de simetría: anillo de Thomson y una esfera con una bobina superior. Estos sistemas constituyen herramientas para presentar el formalismo variacional Lagrangiano como técnica de control, para lo cual se pretende obtener en cada sistema su correspondiente Lagrangiano en lazo cerrado, o Lagrangiano controlado, como también se conoce según el estudio presentado en Bloch *et al.* [3].

El estudio del sistema de levitación magnética que hoy conocemos como anillo de Thomson, tuvo comienzo con el “Experimento del salto del anillo” realizado por Elihu Thomson, en el *American Institute of Electrical Engineers* de New York en el año 1887 [4]; este constaba de una bobina enrollada en torno a la parte inferior de un vástago de hierro, luego, en la parte superior, se colocaron aros de distintos materiales y pesos, los cuales “saltaban” cuando se cerraba o abría el circuito alimentado por una fuente de tensión continua. Durante el paso de los años, el anillo de Thomson ha sido empleado en diversos experimentos ilustrativos del fenómeno de la levitación magnética como sistema de repulsión [5–7], los cuales aplican especialmente principios de la inducción magnética para obtener esquemas de fuerzas, modelos, simulaciones, etc. Un motivo particular en el estudio de este sistema y que ha llamado la atención de varios investigadores, ha sido el obtener un modelo dinámico lo más exacto posible, con el cual por ejemplo, se puedan implementar estrategias de control para las diferentes aplicaciones que la práctica requiera.

El estudio del sistema de levitación magnética conformado por una esfera entre dos bobinas fue mostrado por primera vez en el trabajo de Okress *et al.* [8], en el que se expone un método no convencional para calentar y fundir metales sin un crisol, mediante la suspensión de un elemento esférico en el espacio en presencia de un campo magnético. Tras el paso de los años este sistema ha sido objeto de estudio en diversos trabajos, los cuales se han enfocado en obtener modelos que describan su dinámica de forma precisa [9], empleados de manera conjunta en aplicaciones de control lineal [10, 11] y no lineal [12–14]. En los trabajos presentados por Šuster *et al.* [15] y Hernández *et al.* [16], estudian este sistema teniendo en cuenta características constructivas particulares, como es el considerar una esfera levitando en un campo magnético producido por una sola bobina en posición superior, típico sistema magnético de repulsión con comportamiento inestable [12, 17, 18]. En trabajos realizados recientemente que presentan estudios de sistemas de levitación magnética complejos, como por ejemplo, los cojinetes magnéticos [19, 20], utilizan modelos que describen de forma similar el comportamiento del sistema conformado por una esfera o cilindro entre dos bobinas, muestra que el estudio del mismo ha sido y será de gran aplicación.

1.1.3. Estado del arte

El fenómeno de la levitación magnética ha sido usado con éxito, por ejemplo, en cañones electromagnéticos los cuales accionan proyectiles, evitando el contacto de este con la superficie de la guía, y por lo tanto, anulando la fricción mecánica [21]. En la medicina, la aplicación de este fenómeno físico ha contribuido en el desarrollo de corazones artificiales implementados mediante bombas centrifugas donde el impulsor es levitado magnéticamente, lo que aumenta el desempeño del sistema y minimiza el consumo de energía, nuevamente, debido a la ausencia de fricción [22]. En la industria manufacturera, se han desarrollado máquinas de control numérico computarizado cuyo soporte vertical es levitado magnéticamente [23], lo que aumenta considerablemente la velocidad de desplazamiento de la pieza móvil y la precisión del maquinado. También en el campo de ambientes virtuales y de sistemas de teleoperación se aplica el fenómeno de la levitación magnética, en lo que se conoce como tecnologías del tacto [24]; en particular, se han diseñado sistemas de interacción con el tacto, los cuales permiten tocar, sentir, manipular y alterar objetos levitados magnéticamente, cuya variación de posición y ángulos es monitoreada mediante sensores, luego, la información captada es enviada a interfaces virtuales donde se encuentra un entorno de realidad virtual el cual varía según la modificación del objeto que levita.

En el ámbito académico, la levitación magnética representa uno de los sistemas dinámicos más inestables y altamente no lineales [25], debido a la naturaleza de los campos electromagnéticos y al objetivo de la levitación en sí, para compensar la fuerza gravitacional. Durante años ha sido una plataforma ideal de trabajo para investigadores, los cuales han contribuido a solucionar problemas fundamentalmente de modelado [9, 26], diseño [27], implementación y control. En este último caso aplicando técnicas, tanto clásicas, como modernas; siempre haciendo uso de tecnologías emergentes relacionadas con instrumentos electrónicos y nuevos materiales.

Enfocados específicamente en el problema de control y estabilidad de sistemas de levitación magnética, se han propuesto técnicas de control predictivo para lograr estabilidad en dispositivos que emplean materiales ferromagnéticos [28]. También se han establecido técnicas de control empleando redes neuronales [29] y mediante retroalimentación de estados [30], en ambos casos, se han corroborado los resultados mediante simulaciones y estudios experimentales. Otros autores han atacado el problema de control mediante el empleo de lógica difusa;

según Ishaque *et al.* [31], constituye una alternativa atractiva de control, la cual no considera las complejas ecuaciones matemáticas en sistemas multivariados controlados mediante PID (controlador proporcional, integral y derivativo).

Según la revisión bibliográfica realizada, enfocada especialmente en las citas de los trabajos presentados por Bloch *et al.* [3,32], no se tiene conocimiento de autores que hayan empleado la formulación variacional Lagrangiana en el modelado y control de sistemas de levitación magnética; sólo se han propuesto formulaciones de Lagrangianos controlados en los trabajos de Zhang *et al.* [33], Zhang [34], Hemmasian *et al.* [35] y Kumari *et al.* [36], en los cuales, se toman como objeto de estudio casos específicos de sistemas mecánicos sin considerar levitación magnética. Por dicha razón, este trabajo se enfoca en aplicar el formalismo variacional Lagrangiano en el modelado y control de sistemas de levitación magnética; tomando en principio consideraciones fundamentales expuestas por Arnold [37], Lanczos [38], Jackson [39], López-Monsalvo *et al.* [40] y Ortega *et al.* [41], se puede establecer una formulación variacional mediante Lagrangianos controlados en dos casos específicos de sistemas de levitación magnética, los cuales podrían ser controlados sin necesidad de aplicar esencialmente técnicas de control clásicas, esto, mediante geometría diferencial, aplicada al moldeado de expresiones energéticas, las cuales serían diseñadas según la dinámica deseada para el sistema en lazo cerrado. En otras palabras, se pretende mediante el moldeado de las expresiones energéticas, que un sistema de levitación magnética pueda ser controlado geoméricamente.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Aplicar el método variacional Lagrangiano para la obtención de las ecuaciones de movimiento de sistemas de levitación magnética con alto grado de simetría, particularmente, para el caso del anillo de Thomson y para una esfera con una bobina superior; y presentar para estos, el control a través del formalismo de Lagrangianos controlados.

1.2.2. Objetivos específicos

1. Analizar las características dinámicas de los sistemas de levitación magnética propuestos y reconocer sus grados de libertad.
2. Obtener las ecuaciones de movimiento aplicando el formalismo variacional Lagrangiano.
3. Analizar la estabilidad de los sistemas estudiados a partir de las propiedades geométricas de la energía cinética y potencial.
4. Presentar el formalismo de Lagrangianos controlados aplicado al control de los sistemas de levitación magnética propuestos.
5. Simular la dinámica resultante y la dinámica deseada.

Capítulo 2.

Marco teórico

En este capítulo se motiva el trabajo proporcionando una serie de explicaciones, que en principio, son necesarias para comprender aspectos fundamentales de la dinámica de sistemas mecánicos y de sistemas de levitación magnética simples.

En primera instancia, se presenta la definición del Formalismo Lagrangiano inherente a sistemas conservativos, abordando además, sobre la obtención de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y su equivalencia con la mecánica clásica establecida en las Leyes de Newton. La definición de funciones de energía dentro del Lagrangiano se realiza con un enfoque geométrico, necesario para el posterior cálculo de variaciones aplicando el Principio de Hamilton [42]. Se analiza la definición de energía del campo magnético a partir del trabajo de Panofsky [43]; estos conceptos son de notable aplicación en sistemas electromecánicos, especialmente para nuestros sistemas particulares de levitación magnética.

El acople de sistemas es un punto que no se puede obviar en su modelado, por ello, se explican algunos procedimientos con el fin de implementarlos como funciones de energía en los Lagrangianos correspondientes. De relevancia en el estudio de sistemas de levitación magnética, se presenta el procedimiento de truncamiento de la serie de Taylor abordado por Foy [44] y el procedimiento de ajuste de curvas exponenciales reportado por Maximov *et al.* [45], ambos constituyen variantes de aproximación de la inductancia mutua como función de la posición.

El análisis geométrico de estabilidad, además de ser un reto en el trabajo, es una herramienta distinta a los métodos presentados por Lyapunov [46]. Se utilizan fundamentalmente conceptos establecidos por Arnold [37], por Yahalom *et al.* [47], por Marsden [48] y por López-Monsalvo *et al.* [40], para estudiar el comportamiento de los tensores de curvatura en los sistemas tratados.

Finalmente, se presenta una breve noción de las definiciones referentes a grupos y álgebra de Lie, tomando como punto de partida fundamental los trabajos de Marsden [49,50], herramienta necesaria en la construcción de Lagrangianos controlados como establece Bloch *et al.* [3]. Se desarrolla un ejemplo sencillo de esta técnica para facilitar su comprensión, además de motivar su posterior aplicación en sistemas de levitación magnética.

2.1. Formalismo Lagrangiano

El formalismo Lagrangiano surge, como una manera distinta a la de Newton, de explicar y predecir el movimiento. En el caso Newtoniano, la información que se tiene son todas las fuerzas que actúan sobre un sistema y lo que se busca obtener es la trayectoria resultante. En el formalismo Lagrangiano lo que uno se pregunta es, dada la función de energía potencial (por definición una función escalar), cuál es la trayectoria en el espacio de configuración \mathcal{M} a través de la cual el sistema definido por su función de energía, evoluciona de un estado de

movimiento p_1 a un estado p_2 . Aquí $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$.

El Principio de Hamilton brinda la solución al problema. De todas las trayectorias posibles en las que un sistema puede evolucionar de un estado p_1 a un estado p_2 en el espacio de configuración, el sistema sigue la trayectoria que extremiza el funcional

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} L(\gamma, \dot{\gamma}) dt, \quad \text{donde} \quad \dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \gamma = V, \quad (2.1)$$

y $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de Lagrange o Lagrangiano que, para sistemas simples, está definida por la diferencia entre la energía cinética y la potencial, *i.e.*

$$L(x, v) = T(v) - U(x). \quad (2.2)$$

Extremizar el funcional (2.1), es encontrar la curva sobre \mathcal{M} tal que

$$\left. \frac{\delta}{\delta \gamma} S[\gamma] \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0. \quad (2.3)$$

Aquí, se utiliza δ para denotar la variación de S sobre el espacio de curvas diferenciables sobre \mathcal{M} . La condición necesaria y suficiente que debe satisfacer la curva que extremiza el funcional es la ecuación de Euler-Lagrange

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \right) L(x, v) = 0. \quad (2.4)$$

En el caso más simple, se verifica directamente que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} L(x, v) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} T(v) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} (m v) = m \frac{d}{dt} v, \quad (2.5)$$

mientras que

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x, v) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) = f(x). \quad (2.6)$$

Por tanto, la ecuación de Euler-Lagrange es equivalente a la segunda ley de Newton

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \right) L(x, v) = m \frac{d}{dt} v - f(x) = 0. \quad (2.7)$$

De nueva cuenta, para los sistemas más simples, basta con dar la energía potencial para determinar por completo el movimiento de un sistema para el cual la función de energía es constante a lo largo del movimiento. A estos sistemas se les denomina conservativos. Como caso particular de sistemas conservativos es el movimiento de partículas u objetos en campos externos conservativos, es decir, aquellos que se puedan derivar de un potencial. Tal es el caso del campo electrostático y magnetostático. En este trabajo, estudiaremos las condiciones de equilibrio para las trayectorias integrales de un sistema sometido a campos eléctricos o magnéticos en el caso estático.

2.2. Funciones de energía

El objetivo del cálculo de variaciones es encontrar extremos de funciones definidas sobre espacios de objetos geométricos, como curvas o superficies. A tales funciones se les denomina en la literatura como funcionales. En el caso particular de sistemas mecánicos, se busca aquella curva que extremiza un funcional específico. Para definir adecuadamente el problema, introducimos los elementos matemáticos esenciales en el formalismo variacional.

Consideremos la segunda ley de Newton para una partícula de masa m sobre la cual actúa una fuerza que sólo depende de su posición en cada instante de tiempo, es decir, consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$f(x) = m \frac{d^2}{dt^2} x. \quad (2.8)$$

La solución del problema está dada por una familia de funciones $x = x(t; x_0, p_0)$ donde x_0 y p_0 representan las condiciones iniciales que determinan la curva de manera única.

Este problema se puede geometrizar de la siguiente manera. Primero, se convierte la ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{d}{dt} x(t) = p \quad (2.9)$$

$$m \frac{d}{dt} p = f[x(t)]. \quad (2.10)$$

Se observa que las ecuaciones (2.9) y (2.10) corresponden a las componentes del campo vectorial

$$\begin{aligned} V &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial}{\partial p} \\ &= p \frac{\partial}{\partial x} + \frac{f(x)}{m} \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

definido sobre un espacio fase con coordenadas locales (x, p) , siendo p los momentos conjugados. El campo vectorial (2.11) contiene las funciones diferenciables p y $f(x)$, lo cual significa que es una asignación suave de vectores tangentes a cada punto de \mathcal{M} .

El problema mecánico de resolver la ecuación diferencial (2.8) se convierte en el problema geométrico de encontrar las curvas sobre \mathcal{M} que tienen a V como tangente en cada punto. A tales curvas se les denomina curvas integrales del campo V .

Una manera de atacar el problema geométrico es encontrar la clase de funciones constantes a lo largo del flujo de V , esto es, aquellas funciones $h = h(x, p)$ tales que $V(h) = 0$. Se tiene entonces que

$$V(h) = p \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{f(x)}{m} \frac{\partial h}{\partial p} = 0. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) se puede resolver mediante separación de variables haciendo

$$h = h(x, p) = h_1(x) h_2(p). \quad (2.13)$$

Sustituyendo en (2.12) se sigue que

$$\frac{1}{mp} \frac{d}{dp} \ln(h_2(p)) = -\frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} \ln(h_1(x)). \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) es consistente solamente cuando ambos lados de la ecuación son una misma constante

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dp} \ln(h_2(p)) = C_1 \quad (2.15)$$

$$-\frac{m}{f(x)} \frac{d}{dx} \ln(h_1(x)) = C_1. \quad (2.16)$$

Luego, integrando el sistema, se obtiene

$$h_2 = \exp\left(\frac{1}{2}C_2p^2 + C_1\right) \quad \text{y} \quad h_1 = \exp\left(-\frac{1}{m} \int_{x_0}^x f(x)dx\right). \quad (2.17)$$

De esta forma, escogiendo las constantes de integración de manera apropiada, se tiene que

$$h = h(x, p) = \exp\left(\frac{1}{2}mp^2 - \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1\right). \quad (2.18)$$

Más aún, se puede mostrar que el flujo del campo V es equivalente a la derivada con respecto a t . De manera que

$$\frac{d}{dt}h = V(h) = \exp\left(\frac{1}{2}mp^2 - \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1\right) \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mp^2 - \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1\right) = 0, \quad (2.19)$$

de donde se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mp^2 - \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1\right) = 0. \quad (2.20)$$

Por tanto, la cantidad

$$H(x, p) \equiv \frac{1}{2}mp^2 - \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1, \quad (2.21)$$

es una cantidad conservada a lo largo de las curvas integrales de V . A esta constante de movimiento H se le denomina como energía mientras que a

$$T \equiv \frac{1}{2}mp^2 \quad \text{y} \quad U \equiv - \int_{x_0}^x f(x)dx, \quad (2.22)$$

se les llama energía cinética y potencial respectivamente.

Nótese que, a través del teorema fundamental del cálculo, la energía potencial basta para definir al sistema, es decir

$$f(x) = -\frac{d}{dx}U(x). \quad (2.23)$$

Por tanto, un sistema autónomo en una dimensión está determinado ya sea dando la fuerza $f(x)$ o, de manera equivalente, a través de la función de energía potencial $U(x)$.

2.3. Energía del campo magnético

Al tomar como objeto de estudio fundamental a sistemas electromecánicos, particularmente sistemas de levitación magnética, es necesario introducir el concepto de energía del campo magnético como función de la corriente y la geometría, el cual, será aplicado en las expresiones

Lagrangianas correspondientes a los sistemas tratados. En principio, se define el flujo magnético a través de un circuito como

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.24)$$

donde \mathbf{A} es un campo vectorial rodeado por la superficie S [39, 43]. Si se consideran circuitos lineales, la solución general de este campo vectorial se define de manera que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{\mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{l}_1}{r_{12}}, \quad (2.25)$$

donde \mathbf{J}_1 es la densidad de corriente a través de la superficie encerrada por C_1 y r_{12} la separación entre dos circuitos 1 y 2. Entonces, si se sustituye (2.25) en (2.24), se obtiene

$$\Phi_B = L_{12} \mathbf{J}_1, \quad (2.26)$$

donde L_{12} es la inductancia mutua entre los circuitos; según [43], es una cantidad puramente geométrica definida como

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} = L_{21}. \quad (2.27)$$

Finalmente, se puede establecer la expresión

$$U'_{mf} = \frac{1}{2} L_{12} \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2, \quad (2.28)$$

la cual representa la energía mutua del campo magnético correspondiente a los circuitos 1 y 2. De forma similar, se define la auto-energía

$$U_a = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_1^2 L_{11} + \mathbf{J}_2^2 L_{22}), \quad (2.29)$$

donde L_{11} y L_{22} son las auto-inductancias de los circuitos 1 y 2 respectivamente.

Según plantea [51], la auto-inductancia L_{11} como elemento circuital, está definida por

$$L_{11} = \frac{N\Phi_T}{I_1}, \quad (2.30)$$

donde $N\Phi_T$ representa el total de eslabonamiento de flujo en una bobina de N vueltas, por la cual fluye una corriente I_1 produciendo un flujo total Φ_T que eslabona cada vuelta. Esta definición solo se aplica a materiales magnéticos lineales donde el flujo es proporcional a la corriente; para los casos que contengan materiales ferromagnéticos, como en los sistemas de levitación magnética que se estudian en este trabajo, no existe una expresión general que defina a la auto-inductancia, pero de cierta manera la expresión (2.30) proporciona una idea de este concepto desde el punto de vista circuital.

2.4. Consideración de disipación

La inclusión de términos disipativos en las ecuaciones que representan modelos matemáticos de sistemas físicos es de suma importancia, especialmente porque caracterizan su verdadero comportamiento dinámico cuando dejan de ser sistemas conservativos.

En este trabajo se estudian sistemas conservativos de los cuales se obtienen sus ecuaciones de movimiento a través del formalismo Lagrangiano; naturalmente con la construcción de una

función Lagrangiana no se incluyen términos disipativos en el sistema, pero luego de obtener las ecuaciones de movimiento si se pueden considerar en dependencia del sentido físico del problema que se trate. Bien es conocida la expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (2.31)$$

que representa las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange escritas en coordenadas generalizadas (\dot{q}_i, q_i) cuando existen fuerzas *no conservativas* en el sistema. El Lagrangiano L contiene solo el potencial debido a las fuerzas conservativas, en cambio, el término Q_i representa a las fuerzas que no se derivan de un potencial, por ejemplo, una fuerza de fricción viscosa que es proporcional a la velocidad. Estas fuerzas pueden derivarse de una función de disipación Rayleigh [52].

En este trabajo se consideran términos que representan la disipación en los modelos dinámicos correspondientes, estos se escriben de color azul agregados a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas. Es bien importante destacar que se han considerado como elementos físicos (coeficientes de fricción β y resistencias eléctricas R) proporcionales a la velocidad.

Otra variante para agregar términos disipativos en el modelo de un sistema es la que proponen Bloch *et al.* [3], la cual consiste en incluir la disipación en la propia ley de control que se obtiene para lograr la estabilización del sistema; en este trabajo los términos disipativos no se incluyen en la ley de control, en cambio, solo se consideran como se describe en el párrafo anterior.

2.5. Acople de sistemas

Una consideración que se debe tener en cuenta a la hora de construir la expresión Lagrangiana de un sistema, sin importar su naturaleza, es la interacción o acople que tienen sus componentes. Existen varios métodos o procedimientos matemáticos que facilitan la aproximación de funciones de energía que representan el acople en los sistemas. El estudio que se realiza en esta sección facilitará el trabajo posterior centrado específicamente en sistemas mecánicos y electromecánicos; para el primer grupo, se tendrá en cuenta el coeficiente de elasticidad de una viga fija que acopla dos péndulos, en cambio, para el segundo grupo, se definirá en cada caso la inductancia como función de la distancia, o altura, según las características propias de los sistemas tratados.

2.5.1. Coeficiente de elasticidad

El primer reporte conocido sobre el fenómeno de la sincronización en un sistema data de 1673, cuando el astrónomo, físico, matemático e inventor holandés Christian Huygens, observó un par de péndulos colgados de un soporte común [53]; *“estos péndulos se sincronizaban después de un tiempo de iniciar sus movimientos, alcanzando un estado en que se movían establemente en direcciones opuestas con una sincronía tal, que no se observaba el menor retraso de uno con respecto al otro, aún más, si esta concordancia se perturbaba por alguna interferencia, sola se restablecía después de un tiempo corto”* [54]. Como ya es conocido, este fenómeno tiene origen por el comportamiento no lineal de los componentes del sistema [53].

Para cuantificar la capacidad que tiene un material de transmitir el movimiento de un elemento a otro en un sistema acoplado, de tal forma que exista una sincronía, se emplea un coeficiente que por lo general es denotado como k . Ya sea para un material rígido como

una viga, o para un resorte, por solo citar dos ejemplos, diversos autores han reportado en la literatura una serie de consideraciones para la elección de un valor de k lo más aproximado posible [55–57], y por consiguiente, lograr una mejor representación del sistema en modelos matemáticos.

2.5.2. Truncamiento de la Serie de Taylor

Como plantea el Teorema de Taylor, si la función $y(x)$ y sus primeras $n + 1$ derivadas son continuas en un intervalo que contiene a x_0 y a x , el valor de la función en un punto x está dado por

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n - Y_n, \quad (2.32)$$

donde

$$Y_n = \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} y^{n+1}(t) dt. \quad (2.33)$$

El valor práctico de las series de Taylor radica en el uso de un número finito de términos que darán una aproximación lo suficientemente cercana a la solución verdadera para propósitos prácticos [44].

Al emplear el Teorema de Taylor para aproximar la inductancia mutua en un sistema electromecánico, se puede deducir

$$L_{12}(x) = L_{12_0} + L'_{12} x, \quad (2.34)$$

donde L_{12_0} es un valor de inductancia mutua dado por la evaluación de la función $L_{12}(x)$ en un instante inicial $x(0)$, y L'_{12} , la primera derivada de la función $L_{12}(x)$ evaluada en el mismo instante inicial $x(0)$. La expresión (2.34) en su conjunto, garantiza la aproximación de la inductancia mutua L_{12} como función de una distancia x , por lo tanto, será aplicada posteriormente en el estudio de sistemas de levitación magnética.

2.5.3. Ajuste de curvas exponenciales

Primeramente, se estudia un método de aproximación que propone la función analítica

$$M(z) = \alpha_1 e^{-\beta_1 z} + \alpha_2 e^{-\beta_2 z}, \quad (2.35)$$

empleada para realizar un proceso de ajuste de curvas exponenciales, con las cuales, se obtienen las constantes α_1 , α_2 , β_1 y β_2 [45]; se debe considerar que la inductancia mutua $M(z)$ es solo una función de la posición z , siendo válida solamente cuando el espacio de aire es grande [58]. La efectividad de este método se demuestra en [45], al ser comparado con la solución analítica del sistema del anillo de Thomson desarrollada por sus autores; además, por las comprobaciones experimentales reportadas en dicho trabajo.

Otro método que resulta de interés es el presentado por Hurley *et al.* [59], donde se define la inductancia $L(x)$ en un sistema de levitación magnética como función de la posición de una bola de acero macizo con respecto a una bobina superior. Según el autor, con la expresión exponencial

$$L(x) = L_1 + L_0 e^{-\frac{x}{a}}, \quad (2.36)$$

se puede representar matemáticamente el comportamiento de la inductancia en el sistema de una forma sencilla. L_1 es la inductancia del sistema cuando se retira la bola, en otras palabras,

solamente considerando la auto-inductancia de la bobina; sin embargo, el término $L_1 + L_0$ representa la inductancia en el sistema cuando existe interacción entre la bola y la bobina, reflejado en el comportamiento exponencial de $L(x)$ como se muestra en la figura 2.1. El parámetro a es una constante basada en las dimensiones de la bobina, y x , la separación de la bola con respecto a la bobina. Los trabajos experimentales de Hurley *et al.* [59] y Hernández *et al.* [16], aportan consideraciones precisas y valores específicos para evaluar los parámetros mencionados.

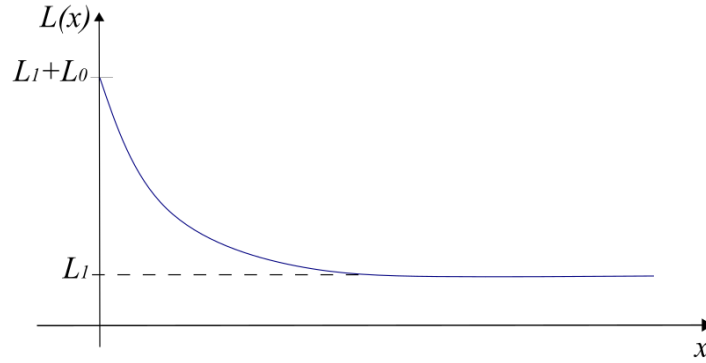


Figura 2.1: Característica exponencial de la inductancia en el sistema de levitación magnética conformado por una esfera con una bobina superior.

2.6. Análisis geométrico de estabilidad

El término “estabilidad”, sin dudas, ha estado ligado al argot popular en el transcurso del tiempo, describiendo el comportamiento de diversos sistemas que para la sociedad resultan de gran importancia; sistemas financieros, estructurales, de ingeniería o física aplicada, por solo citar algunos ejemplos. El primer concepto formal de estabilidad de un sistema, a partir del estudio del problema general de la estabilidad del movimiento, fue definido por Lyapunov en el año 1892 [46], y a partir de esa fecha, decenas de investigadores han proporcionado variantes de este concepto, reflejadas esencialmente, en técnicas de análisis de estabilidad.

El surgimiento y evolución de estas técnicas, ha proporcionado que sistemas dinámicos con características particulares, puedan ser analizados de acuerdo a su estabilidad con relevante precisión. Un ejemplo que ha tenido notable aplicación en estudios recientes y que ha sido motivo de comparación incluso, con los métodos presentados por Lyapunov [60], es el análisis geométrico de estabilidad. En el trabajo de Yahalom *et al.* [47], se resalta la fuerza del análisis geométrico de estabilidad ante un incompleto análisis de Lyapunov, aplicado en este caso al movimiento Kepler, para el cual, en el trabajo de Horwitz *et al.* [61] predicen la estabilidad observada precisamente aplicando un análisis geométrico.

Una técnica dentro del análisis geométrico, y que ha sido tratada por algunos autores en los últimos años [62–64] con aplicaciones en diversos campos de la ciencia, es el análisis de estabilidad de Jacobi, el cual, surge a partir de los trabajos de D. Kosambi [65], E. Cartan [66] y S. Chern [67]. Como establece Abolghasem [60], la estabilidad de Jacobi es una generalización natural de la estabilidad del flujo geodésico en una variedad diferenciable, equipada con una métrica de Riemann. La aplicación de este método permite estudiar la desviación de las trayectorias definidas en una vecindad de la variedad diferenciable, lo cual, proporciona una vía para estimar las perturbaciones alrededor de las soluciones del sistema en estado estacionario.

2.6.1. Descripción del método

Como se reporta en el trabajo de López-Monsalvo *et al.* [40], dentro de las teorías de campo geométrico existen problemas de dos tipos: en un primer caso, dadas las fuentes se determinan las curvaturas, y en un segundo caso, dadas las curvaturas se determinan las trayectorias de las partículas de prueba; siendo las fuentes en ambos casos, las que determinan la geometría de fondo para el movimiento. Siguiendo este planteamiento, se puede afirmar que si se realiza una adecuada distribución de energía en un sistema, se puede reproducir para este cualquier movimiento observado en el espacio.

Entonces, tomando como objeto de estudio un sistema mecánico con n grados de libertad asociado a la función Lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, donde TQ es un espacio tangente al espacio de configuración \mathcal{M} , se debe considerar la geometrización de dicho espacio \mathcal{M} mediante la transformación de la matriz de inercia en el Lagrangiano a un tensor métrico de Jacobi G , de forma tal, que las curvas extremas de la acción S en el funcional definido por la expresión (2.1) coincidan con la geodésica de G para un sistema natural definido por la función Lagrangiana (2.2) con energía potencial U .

Este tensor métrico se conoce como métrica de Jacobi, definida en el trabajo de López-Monsalvo *et al.* [40] de una manera muy peculiar empleando la información energética del sistema

$$G = 2(E - V(p)) M, \quad (2.37)$$

donde E es la energía de las condiciones iniciales, cantidad conservada en el movimiento. Aquí, se puede establecer la relación

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma} = \frac{\delta l}{\delta \gamma}, \quad (2.38)$$

donde el miembro izquierdo corresponde a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange relacionadas con el funcional de acción (2.1) con $\gamma : [t_1, t_2]$; el miembro derecho corresponde a las curvas geodésicas de la métrica de Jacobi relacionadas con el funcional de longitud de arco

$$l[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{G(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt. \quad (2.39)$$

Ahora, contando con una métrica en (2.37), se pueden obtener las curvas que minimizan el funcional o, en otras palabras, identificar las trayectorias en el espacio de configuración \mathcal{M} del movimiento natural de un sistema dado con geodésicas en una variedad Riemanniana [37, 40].

El análisis de la ecuación de Jacobi

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^2 \xi + \Omega(\dot{\gamma}, \xi) \dot{\gamma} = 0, \quad (2.40)$$

muestra que la componente normal del campo vectorial Ω de variación geodésica ξ , oscila con el tiempo [37]; en otras palabras, las geodésicas con velocidades iniciales cercanas en una variedad de la curvatura, oscilan una alrededor de la otra con posible convergencia local. La negatividad en las curvaturas seccionales implica divergencia exponencial de las geodésicas cercanas a una geodésica dada [37]. En la figura 2.2 se muestra la divergencia exponencial de las geodésicas ζ_1 y ζ_2 en las vecindades p y q respectivamente con variación geodésica ξ .

La consideración final en el análisis geométrico de estabilidad, la cual permite concluir sobre el comportamiento del sistema después de obtener las curvaturas, es la observación de los signos en el escalar de Ricci obtenido a partir del tensor métrico G ; según se demostró en el trabajo de Horwitz *et al.* [61], al aplicar el estudio en varios casos, el sistema será inestable si al menos uno de los valores propios del escalar de Ricci obtenido es negativo. Por el contrario, puede considerarse que el sistema es estable si existe una totalidad de valores propios positivos.

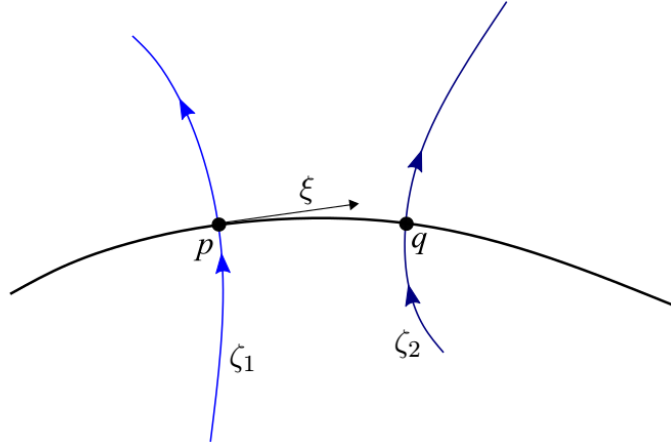


Figura 2.2: Divergencia exponencial de geodésicas.

2.7. Grupos y álgebra de Lie

El estudio de lo que hoy conocemos como Teoría de Lie tuvo inicio en el año 1873, cuando el matemático noruego Sophus Lie estudiaba propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales [68]. Dentro de esta teoría, se contempla la introducción de la noción de invariantes en el análisis y en la geometría diferencial [69]; especialmente argumentada en las observaciones del propio matemático con respecto a los métodos clásicos de solución de ecuaciones diferenciales [68]. En este trabajo solo se mostrará una breve noción de las definiciones y teoremas fundamentales en el estudio de grupos y álgebra de Lie, enfocados a la aplicación que posteriormente daremos dentro del estudio de Lagrangianos controlados.

Definición 1: Un álgebra de Lie \mathfrak{a} es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo \mathbb{F} junto con una operación binaria $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ llamada corchete de Lie; este tiene que ser bilineal, antisimétrico y satisfacer la identidad de Jacobi.

Definición 2: Propiedades de grupo.

- Si $a, b \in G$, entonces $ab \in G$.
- Si $\forall I \in G \mid a \cdot I = I \cdot a = a$, entonces $a \in G \forall a \in G$.
- Si $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \mid a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I$, entonces $I \in G$.

Entonces, sea (G, \cdot) un grupo donde G es un conjunto, o bien, una variedad diferencial y $\cdot : G \times G \rightarrow G$, una operación binaria como producto cartesiano de dos elementos $a, b \in G$ mapeado a G , de tal forma que un tercer elemento $c = ab \in G$; entonces, (G, \cdot) es un grupo de Lie si [70]:

- G es una variedad diferencial.
- El mapeo $\cdot : G \times G \rightarrow G$ es infinitamente diferenciable.
- El mapeo de inversión $I : G \rightarrow G^{-1}$ es infinitamente diferenciable.

Como en el grupo de Lie (G, \cdot) , G es una variedad diferencial como se aprecia en la figura 2.3, se pueden definir sobre ella un conjunto de campos vectoriales $\Psi(G) = \{X\} \mid X$ es un campo vectorial sobre G [71]. Además, si se define $L_g : G \rightarrow G$ que mapea $a \rightarrow L_g(a) = ga$, $a \in G$, $\forall a \in G$, la acción de traslación izquierda L_g por un elemento $g \in G$, permite establecer el punto ga trasladado desde a bajo la acción en g ; en otras palabras, a partir del mapeo de la variedad G en sí misma se pueden reacomodar todos sus puntos.

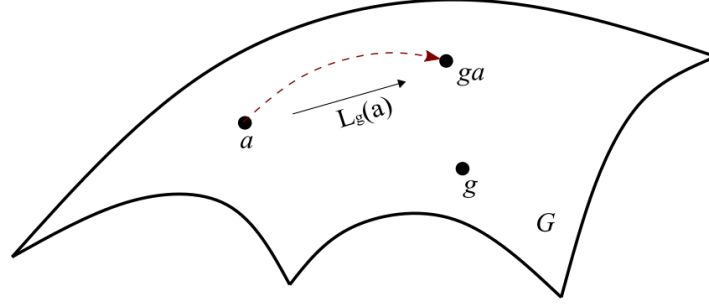


Figura 2.3: Reacomodo de puntos en la variedad diferencial G .

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede definir un mapeo inducido $L_g^* : T_a G \rightarrow T_{ga} G$, equivalente a la traslación de un campo vectorial $T_a G$ hacia un campo vectorial $T_{ga} G$ como se observa en la figura 2.4. Aquí, el vector $X|_a \in T_a G$ tangente a G en el punto a , es mapeado al vector $Y|_{ga} \in T_{ga} G$ tangente en el punto ga , de tal forma que $Y|_{ga} = L_g^*(X|_a)$; esto es válido si se define la acción L_g^* sobre funciones, o sea, $Y|_{ga}(f) = (L_g^* X|_a)(f)$, donde $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ comenzando en a . La función f puede definirse mediante la composición de funciones $f \cdot L_g^* : G \rightarrow \mathbb{R}$ evaluada sobre X , de tal forma que $Y|_{ga}(f) = X|_a(f \cdot L_g^*)(f)$.

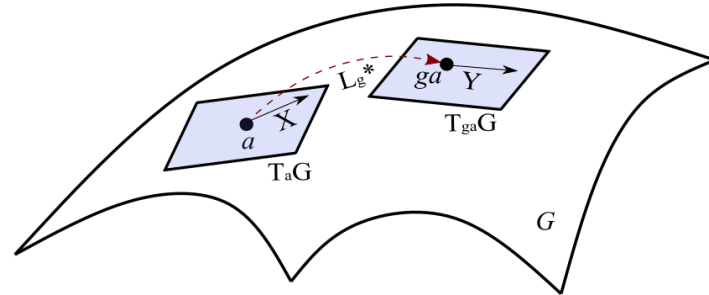


Figura 2.4: Reacomodo de campos vectoriales en la variedad diferencial G .

En este sentido, se debe aclarar que $L_g^* X|_a \neq X|_{ga}$, donde $X|_{ga} \in T_{ga} G$ es un vector que se corresponde con $X|_a \in T_a G$ mediante mapeo, pero no por la influencia de la acción L_g^* . Dada la poca probabilidad de coincidencia de dos vectores en diferentes campos vectoriales, cuando existe una acción de grupo, se debe emplear la definición de campos vectoriales invariantes por la izquierda.

Definición 3: Sea $X \in \Psi(G)$ un campo vectorial, es invariante izquierdo si $L_g^* X = X \forall g \in G$; este conjunto se define como $\mathcal{L}(G) \subset \Psi(G)$.

Con todo el análisis realizado, se presentan los siguientes teoremas algebraicos:

Teorema 1: $\mathcal{L}(G)$ es un espacio vectorial con dimensión $\dim(\mathcal{L}(G)) = \dim(G) = n < \infty$; Teorema fundamental de los grupos de Lie [50, 68].

Este teorema se prueba mediante el Teorema fundamental del álgebra lineal [72, 73], que concluye isomorfismo entre espacios vectoriales de dimensiones equivalentes. Retomando el análisis, si se prueba que $\mathcal{L}(G)$ tiene dimensión $\dim(\mathcal{L}(G)) = n$ y G una variedad diferencial, puede emplearse la identidad de G para definir el Teorema 2, que será aplicado finalmente al estudio de lagrangianos controlados.

Teorema 2: El espacio vectorial $\mathcal{L}(G)$ de campos vectoriales invariantes izquierdos, es isomorfo al espacio tangente $T_i G$ a la identidad en G , el cual, se puede denotar como el álgebra de grupo \mathfrak{g} , o bien, álgebra de Lie.

Entonces, definiendo a \mathfrak{g} como un espacio vectorial $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$, se obtiene

$$\mathcal{L}(G) \simeq T_i G \simeq \mathfrak{g}. \quad (2.41)$$

2.7.1. Ejemplo de aplicación

Sea $SO(2) = \{\mathfrak{R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \det(\mathfrak{R}) = 1\}$ el conjunto de matrices de rotación \mathfrak{R} , donde

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \forall \theta \in (0, 2\pi). \quad (2.42)$$

1. Probar que, teniendo $\mathfrak{R}_\theta, \mathfrak{R}_\phi \in SO(2)$, se puede obtener $\mathfrak{R}_\theta \cdot \mathfrak{R}_\phi \in SO(2)$.

Solución: Se obtiene

$$\mathfrak{R}_{\theta, \phi} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sen(\theta + \phi) \\ -\sen(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

que también es una matriz de rotación $\mathfrak{R}_{\theta, \phi} \in SO(2)$.

2. Probar que $\exists I \in SO(2) \mid \mathfrak{R}_\theta \cdot I = I \cdot \mathfrak{R}_\theta = \mathfrak{R}_\theta$.

Solución: Considerando

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sen 0 \\ -\sen 0 & \cos 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

como una rotación de 0° , es equivalente a no rotar; en otras palabras, quedarse en el mismo lugar. Por lo tanto, $\mathfrak{R}_\theta \cdot I = I \cdot \mathfrak{R}_\theta = \mathfrak{R}_\theta$.

3. Probar que $\forall \mathfrak{R}_\theta \in SO(2), \exists \mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}_{-\theta} \in SO(2) \mid \mathfrak{R}^{-1} \cdot \mathfrak{R}_\theta = \mathfrak{R}_\theta \cdot \mathfrak{R}^{-1} = I$.

Solución: Considerando

$$\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

se demuestra la paridad de las funciones sen y cos, y por consiguiente, $\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}_{-\theta} \in SO(2)$.

4. Probar que $SO(2)$ es una variedad diferencial.

Solución: Considerando el círculo

$$SO(2) \sim S^1, \quad (2.46)$$

donde a cada punto $p \in S^1$, se le puede asociar solamente una matriz de rotación definida por el mapeo invertible

$$\begin{aligned} \Phi : S^1 &\rightarrow SO(2) \\ \theta &\rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta = \theta + 2\pi \end{aligned} \quad (2.47)$$

de forma tal que se cumple el homeomorfismo $S^1 \simeq SO(2)$. Por lo tanto, como en cada punto $p \in S^1 \ni T_p S^1$ un espacio tangente como se aprecia en la figura 2.5, se puede concluir que $SO(2) \sim S^1$ es una variedad diferencial.

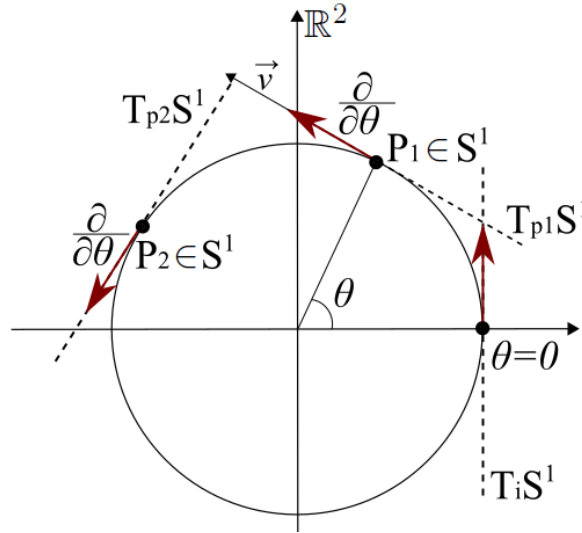


Figura 2.5: Espacios tangentes a las matrices de rotación en un círculo unitario.

Como se observa, el vector $\frac{\partial}{\partial \theta}$ representa en cada espacio $T_{p_1} S^1$ y $T_{p_2} S^1$ la dirección del crecimiento de θ como coordenada angular. El vector \mathbf{v} está definido por la combinación lineal de un escalar λ con el elemento $\frac{\partial}{\partial \theta}$. El espacio $T_i S^1$ es tangente a la identidad de S^1 , generado por $\frac{\partial}{\partial \theta}$ en el punto $\theta = 0$. Finalmente, puede definirse

$$T_i S^1 \simeq T_i SO(2) \simeq \mathfrak{g}_{SO(2)}, \quad (2.48)$$

donde $\mathfrak{g}_{SO(2)}$ es el álgebra de Lie del grupo. De esta forma, en conjunto con las demás pruebas realizadas en el ejemplo, puede demostrarse que $SO(2)$ es un grupo de Lie.

Capítulo 3.

Sistemas mecánicos

El estudio de sistemas mecánicos ha servido a través de los tiempos para entender fenómenos físicos que a diario nos encontramos en la propia naturaleza. En la literatura clásica de física podemos encontrar varios ejemplos de sistemas con características dinámicas particulares [74], tan simples como una partícula libre en el espacio o más complejos como una combinación de masas con movimiento angular considerando fricción y amortiguamiento.

En este capítulo estudiaremos tres casos clásicos de sistemas mecánicos: el péndulo simple, dos péndulos acoplados por una viga fija y el péndulo invertido en un carro. Si bien es conocido el modelo matemático de estos sistemas, así como el comportamiento dinámico de cada uno, como se aprecia en el trabajo detallado de Baker *et al.* [75], su estudio nos ayudará a comprender la dinámica de los sistemas de levitación magnética que posteriormente se analizarán; puede establecerse una analogía en las funciones de energía para la construcción de Lagrangianos. El caso particular del péndulo invertido en el carro, servirá posteriormente para explicar con detalle el Formalismo Lagrangiano controlado reportado por Bloch *et al.* [3], por lo que comprender su dinámica natural en este capítulo es de vital importancia.

La novedad presentada en el capítulo se evidencia en la aplicación del análisis geométrico de estabilidad a estos sistemas, usando los conceptos reportados en el capítulo anterior. Nuevamente el caso del péndulo invertido en el carro, debido a sus características, aportará mayor conocimiento e información en este análisis.

3.1. Péndulo simple

El primer sistema que se presenta es un péndulo simple como se observa en la figura 3.1, el cual está sujeto por su extremo superior a una viga fija por medio de un rodamiento sin fricción. La barra rígida de longitud l que une la bola del péndulo con el rodamiento no tiene masa considerable, en cambio, la bola tiene masa m . El ángulo θ comprendido entre la barra y el semieje negativo y representa la posición angular del péndulo, siendo este, el único grado de libertad considerado en el sistema. La trayectoria descrita por el movimiento del péndulo tendrá una componente en x y otra en y , definidas en las coordenadas de posición (x_m, y_m) respectivamente.

De acuerdo a estas consideraciones y empleando la expresión (2.2), se define el Lagrangiano natural del sistema

$$L = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta, \quad (3.1)$$

con el cual, se puede derivar la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange (2.4); en este caso

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (3.2)$$

Luego, se obtiene la ecuación de movimiento del sistema

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta - \beta \dot{\theta}, \quad (3.3)$$

de acuerdo a único grado de libertad considerado. El término señalado en azul corresponde al efecto de un coeficiente de fricción β en el sistema; dicho término no surge naturalmente de la ecuación de movimiento obtenida, pero si será necesaria su consideración en el estudio de la dinámica propia del sistema. Tanto la frecuencia de oscilación angular ω , como el período de oscilación T respectivamente

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3.4)$$

solo dependen de la constante de aceleración de la gravedad g y de la longitud l de la barra del péndulo; ambos son independientes de la masa m .

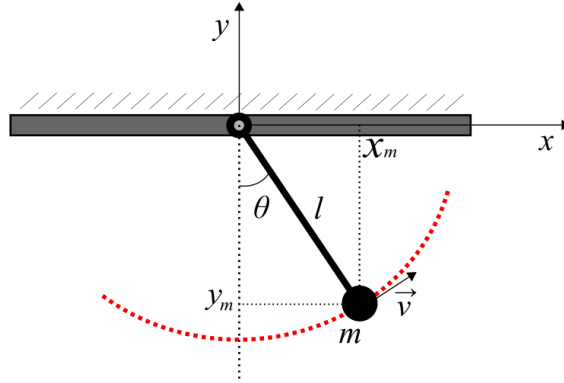


Figura 3.1: Péndulo simple.

El signo de la energía potencial en la expresión (3.1), se corresponde con la dirección de la fuerza de gravedad F_g como se muestra en la figura 3.2, donde se presentan además, las referencias de la posición angular del péndulo en radianes.

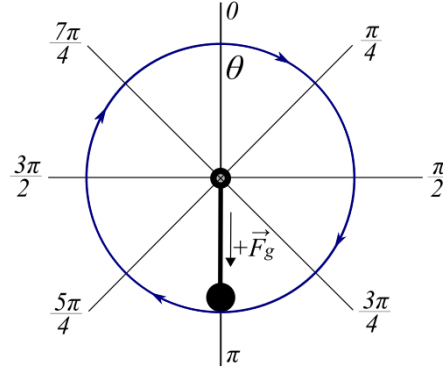


Figura 3.2: Referencias de la posición angular del péndulo simple.

3.1.1. Simulación de la dinámica propia del sistema

Para realizar la simulación de la dinámica natural del sistema a partir de la expresión (3.3), se consideran los parámetros: $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $g = 9.81$ m/s², y como condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{3\pi}{4}$ y $\dot{\theta}(0) = 0$. El tiempo de la simulación es $t = 20$ s.

En la figura 3.3 se aprecia la posición angular oscilatoria del péndulo. Esta oscilación permanente alrededor de π se debe a la no consideración de la fricción, tanto la del rodamiento en el extremo de la barra como la producida por el aire; esto implica que el sistema sea conservativo, demostrando la correcta formulación Lagrangiana en la expresión (3.1).

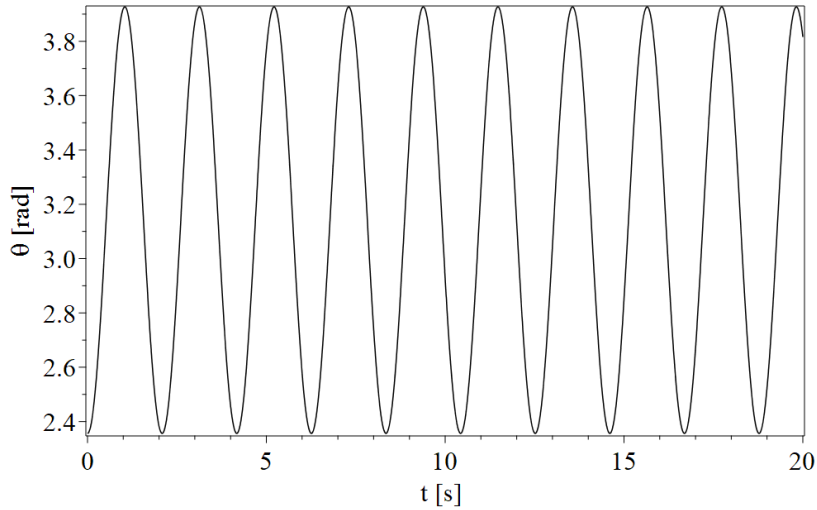


Figura 3.3: Posición angular oscilatoria del péndulo simple.

Si se considera un coeficiente de fricción en el sistema $\beta = 0.5$, se observa en la figura 3.4 que la posición angular oscilatoria tiende a π en la misma dirección que la fuerza de gravedad considerada cuando $t \rightarrow \infty$.

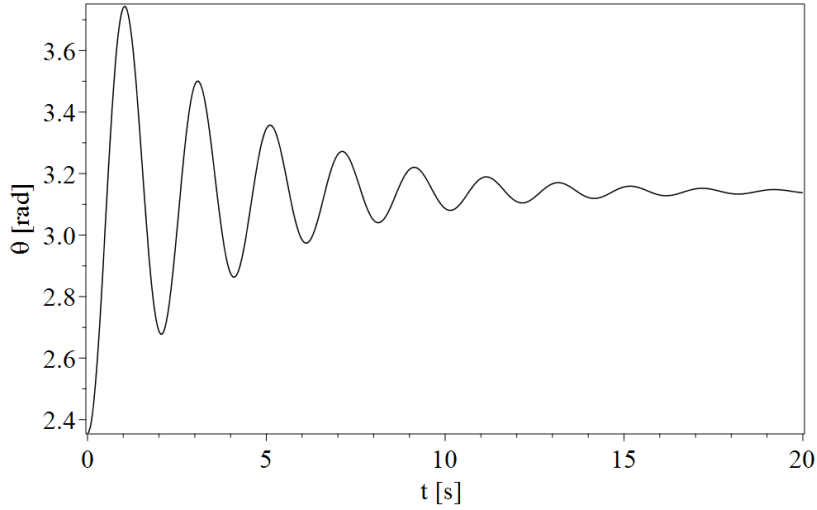


Figura 3.4: Posición angular del péndulo simple bajo el efecto de la fricción.

3.2. Dos péndulos acoplados por una viga fija

El segundo sistema que se presenta es el conformado por dos péndulos como se aprecia en la figura 3.5, los cuales están sujetos por sus extremos superiores a una viga fija por medio de rodamientos sin fricción. Las barras rígidas de longitudes l_1 y l_2 respectivamente, unen las bolas de los péndulos con sus correspondientes rodamientos; estas barras no tienen masa considerable, en cambio, las bolas tienen masa m_1 y m_2 respectivamente. Los ángulos θ y φ comprendidos entre el semieje negativo y y cada barra, respectivamente, representan la posición angular de cada péndulo, siendo estos los dos grados de libertad considerados en el sistema. Las trayectorias descritas por el movimiento de los péndulos tendrán componentes en x y en y , definidas en las coordenadas de posición (x_{m_1}, y_{m_1}) y (x_{m_2}, y_{m_2}) respectivamente. La diferencia de este sistema con respecto al péndulo simple consiste en la conexión de los dos péndulos en la viga; este acoplamiento puede ser representado matemáticamente por el coeficiente de elasticidad k_{12} , el cual, como se reportó en el Capítulo II, dependerá especialmente de los materiales empleados en la construcción de la viga.

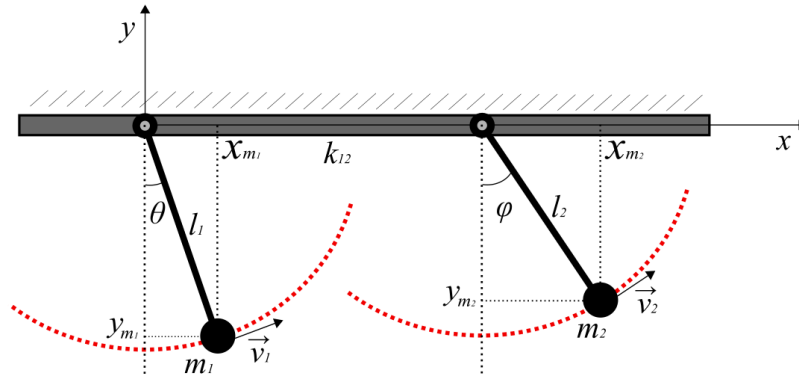


Figura 3.5: Dos péndulos acoplados.

De acuerdo a estas consideraciones y empleando la expresión (2.2), se define el Lagrangiano

natural del sistema

$$L = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2}{2} + k_{12} \dot{\theta} \dot{\varphi} + m_1 g l_1 \cos \theta + m_2 g l_2 \cos \varphi, \quad (3.5)$$

con el cual, se pueden derivar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (2.4); en este caso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Luego, se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) &= \frac{m_2 g l_2 (\sin \theta \, l_1 l_2 m_1 - \sin \varphi \, k_{12})}{-l_1^2 l_2^2 m_1 m_2 + k_{12}^2} - \beta \dot{\theta}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) &= \frac{m_1 g l_1 (-\sin \varphi \, l_1 l_2 m_2 + \sin \theta \, k_{12})}{l_1^2 l_2^2 m_1 m_2 - k_{12}^2} - \beta \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

de acuerdo a único grado de libertad considerado. Los términos señalados en azul corresponden al efecto de un coeficiente de fricción β en el sistema; dicho término no surge naturalmente de las ecuaciones de movimiento obtenidas, pero si será necesaria su consideración en el estudio de la dinámica propia del sistema. Puede notarse que en ambas está presente el coeficiente de elasticidad de la viga, evidenciando el acoplamiento en el modelo matemático y cuya efectividad será comprobada en la sección 2.5.1.

Cada péndulo individualmente tendrá frecuencia y período de oscilación independiente de su masa, como se describe en la expresión (3.4), pero al estar acoplados si existirá una diferencia en el período de oscilación de cada uno, dependientes del coeficiente de elasticidad, además, de la longitud de la barra y de la masa del péndulo contrario; en principio, cuando se acciona un péndulo y el otro se encuentra en reposo, el primer péndulo comenzará a oscilar con mayor período que el segundo, pero según avanza el tiempo y sin tener en cuenta parámetros de fricción, ambos péndulos llegarán a oscilar con el mismo período siempre con la misma frecuencia. Para cada péndulo en este sistema se consideraron referencias de posición angular y dirección de la fuerza de gravedad F_g como se muestra en la figura 3.2, correspondiente al estudio del péndulo simple.

3.2.1. Simulación de la dinámica propia del sistema

Para realizar la simulación de la dinámica natural a partir del sistema (3.7), se consideran los parámetros: constante de inercia de acoplamiento $k_{12} = 0.005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $l_1 = 0.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, y como condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{\varphi}(0) = 0$. Se realiza la simulación con un tiempo $t = 160 \text{ s}$ con el objetivo de observar de mejor manera la transferencia de movimiento de un péndulo a otro, y por consiguiente, la conservación de la energía en el sistema.

En las figuras 3.6 y 3.7 se aprecian las posiciones angulares oscilatorias de cada péndulo respectivamente, obtenidas en la simulación. Las oscilaciones permanentes de cada péndulo alrededor de π se deben a la no consideración de la fricción, tanto la de los rodamientos en el extremo de cada barra como la producida por el aire; esto implica que el sistema sea conservativo, demostrando la correcta formulación Lagrangiana en la expresión (3.5).

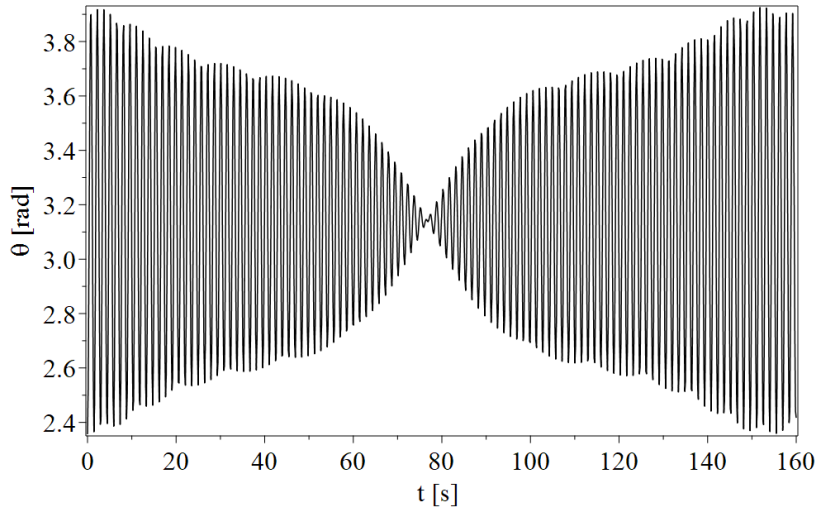


Figura 3.6: Posición angular oscilatoria del péndulo izquierdo.

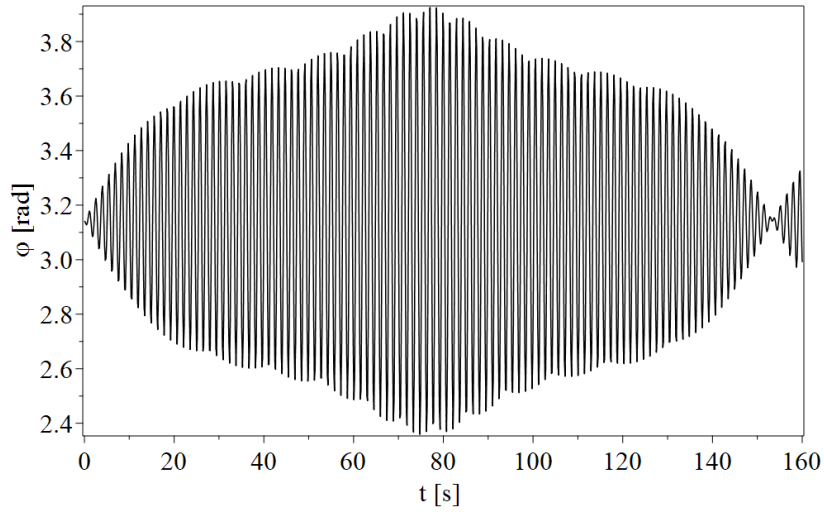


Figura 3.7: Posición angular oscilatoria del péndulo derecho.

Para considerar la fricción se lleva a cabo otra simulación con tiempo $t = 10$ s, donde se emplea el coeficiente $\beta = 0.5$. Como se aprecia en las figuras 3.8 y 3.9, la posición angular oscilatoria de cada péndulo respectivamente, tiende a π en la misma dirección que la fuerza de gravedad considerada cuando $t \rightarrow \infty$.

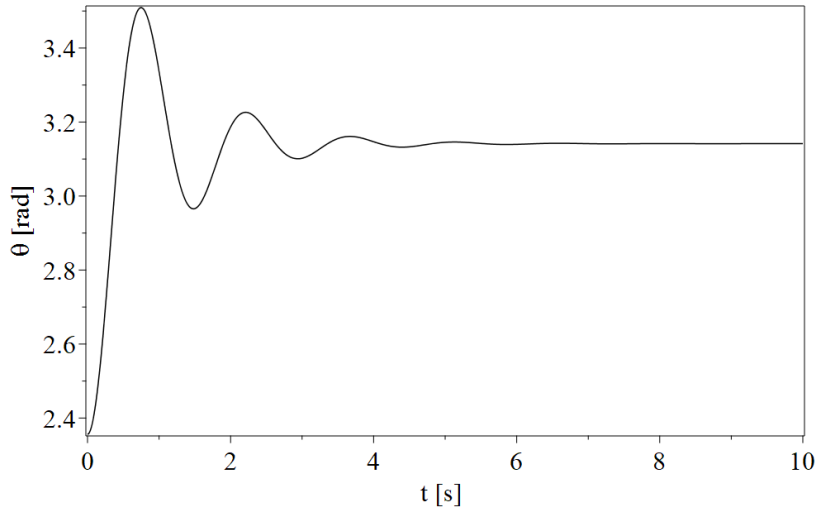


Figura 3.8: Posición angular del péndulo izquierdo bajo el efecto de la fricción.

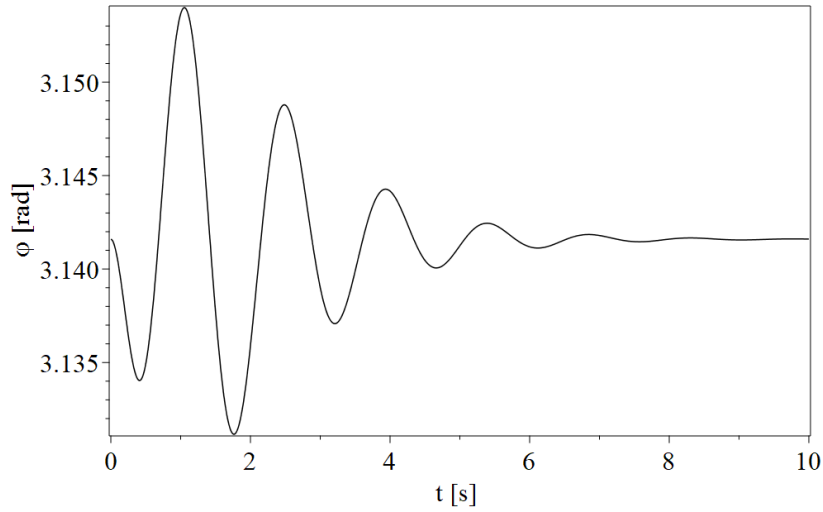


Figura 3.9: Posición angular del péndulo derecho bajo el efecto de la fricción.

3.2.2. Análisis geométrico de estabilidad

De acuerdo a los grados de libertad θ y φ considerados en el sistema, se puede construir el tensor métrico

$$G = m_1 l_1^2 d\theta \otimes d\theta + k_{12} d\theta \otimes d\varphi + k_{12} d\varphi \otimes d\theta + m_2 l_2^2 d\varphi \otimes d\varphi, \quad (3.8)$$

con el cual, se define la métrica no singular y definida positiva

$$\mu = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & k_{12} \\ k_{12} & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Aplicando el análisis geométrico de estabilidad desarrollado en la sección 2.6, se obtiene la métrica de Jacobi cuyo grado es de orden 2, y por lo tanto, no presenta problemas como en el

caso anterior correspondiente al sistema del péndulo simple, ya que la dimensión del espacio de configuración de este sistema es $S = 2$. Entonces, con esta métrica de Jacobi se obtiene un escalar de Ricci nulo; esto equivale a obtener un plano que no brinda información de los signos de dicho escalar. Al no tener signos que permitan concluir estabilidad o inestabilidad en el sistema, no se puede emplear este método según las consideraciones realizadas. De igual manera que en el sistema del péndulo simple, se puede tener en cuenta la dirección del movimiento de los péndulos, además de considerar perturbaciones para asumir que será estable cuando $t \rightarrow \infty$.

3.3. Péndulo invertido sobre un carro

El tercer y último sistema que se presenta en este capítulo es el conformado por un péndulo invertido en un carro como se aprecia en la figura 3.10. El péndulo está sujeto al carro de masa M por su extremo inferior mediante un rodamiento sin fricción. La barra rígida de longitud l sin masa considerable, une la bola del péndulo de masa m con el rodamiento. El ángulo θ comprendido entre el semieje positivo y y la barra, representa la posición angular del péndulo. Los dos grados de libertad considerados en el sistema son, la mencionada posición angular θ del péndulo y la posición del carro denotada por x_M . La trayectoria de movimiento del péndulo tendrá una componente tanto en x como en y siguiendo las coordenadas (x_m, y_m) ; en cambio, la trayectoria del carro solo estará definida en el eje x por la coordenada x_M . Posteriormente se realizarán los cálculos del Lagrangiano controlado en este sistema, por lo que el estudio de la dinámica natural del mismo en este capítulo será de gran ayuda.

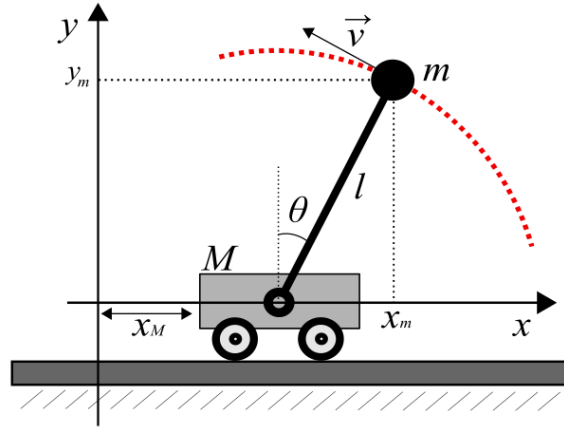


Figura 3.10: Péndulo invertido en un carro.

De acuerdo a estas consideraciones y empleando la expresión (2.2), se define el Lagrangiano natural del sistema

$$L = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(M+m)\dot{x}_M^2}{2} + ml \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_M - mgl \cos \theta. \quad (3.10)$$

Puede notarse que el acoplamiento en el sistema se encuentra en el término $ml \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_M$. Con la expresión (3.10), se pueden derivar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (2.4); en este caso

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_M} = 0. \quad (3.11)$$

Luego, se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) &= \frac{\sin \theta \left(\dot{\theta}^2 \cos \theta m^2 l^2 - mgl (M + m) \right)}{\cos^2 \theta m^2 l^2 - ml^2 (M + m)} - \beta_1 \dot{\theta}, \\ \frac{d^2}{dt^2} x_M(t) &= - \frac{\sin \theta ml \left(\dot{\theta}^2 ml^2 - mgl \cos \theta \right)}{\cos^2 \theta m^2 l^2 - ml^2 (M + m)} - \beta_2 \dot{x}_M. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Los términos señalados en azul corresponden al efecto de los coeficientes de fricción β_1 y β_2 en el sistema, para las ecuaciones de θ y x_M respectivamente; dichos término no surgen naturalmente de las ecuaciones de movimiento obtenidas, pero si será necesaria su consideración en el estudio de la dinámica propia del sistema. También se consideraron las referencias de posición angular y dirección de la fuerza de gravedad F_g como se muestra en la figura 3.2, correspondiente al estudio del péndulo simple. Por esta razón la energía potencial en la expresión (3.10) tiene signo negativo.

3.3.1. Simulación de la dinámica propia del sistema

La simulación de la dinámica natural se realiza partir del sistema (3.12), considerando los parámetros: $m = 0.5$ kg, $M = 1$ kg, $l = 2$ m, $g = 9.81$ m/s², y como condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$, $x_M(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{x}_M(0) = 0$. Se realiza la simulación con un tiempo $t = 20$ s.

En la figura 3.11 se aprecia la posición angular oscilatoria del péndulo. Estas oscilaciones permanentes del péndulo alrededor de π se deben a la no consideración de la fricción, tanto la del rodamiento en el extremo de la barra como la producida por el aire; esto implica que el sistema sea conservativo, demostrando la correcta formulación Lagrangiana en la expresión (3.10).

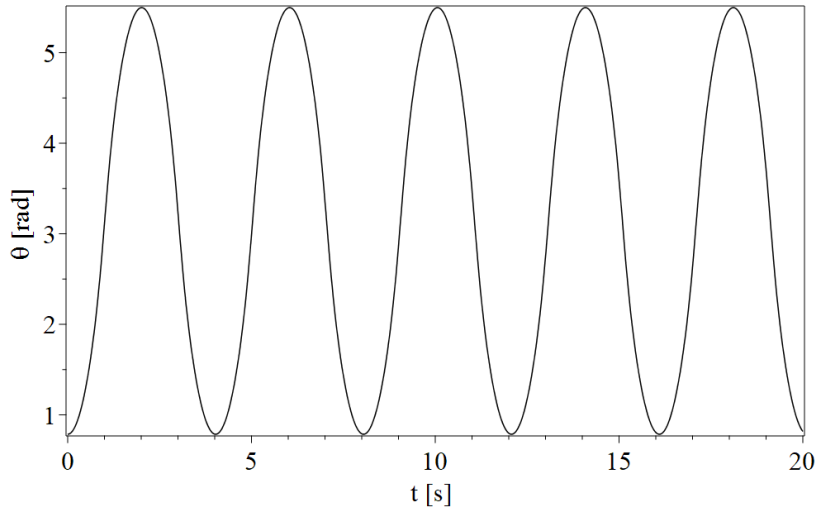


Figura 3.11: Posición angular del péndulo invertido.

En la figura 3.12 se observa la posición horizontal del carro. Su movimiento repetitivo permanente también se debe a la ausencia de fricción. La particularidad de este sistema al no tener control, y como se aprecia en la simulación teniendo en cuenta las referencias de

la posición angular, es que el péndulo cae pasando por $\theta = \pi$ manteniendo un movimiento constante como se mencionaba anteriormente. El propio movimiento del péndulo provoca que el carro se mueva en un rango determinado experimentando un frenado en cada extremo.

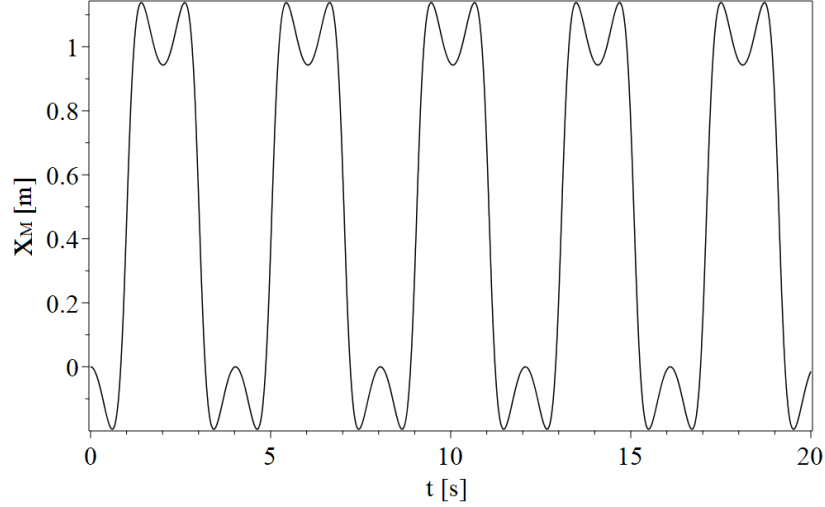


Figura 3.12: Posición horizontal del carro.

Se realiza otra simulación con tiempo $t = 20$ s para considerar la fricción en el sistema; los coeficientes empleados son $\beta_1 = 0.1$ y $\beta_2 = 0.5$ en la ecuación de movimiento del péndulo y del carro respectivamente. Como se observa en la figura 3.13, la posición angular oscilatoria del péndulo tiende a π , su punto de equilibrio estable, en la misma dirección que la fuerza de gravedad considerada cuando $t \rightarrow \infty$.

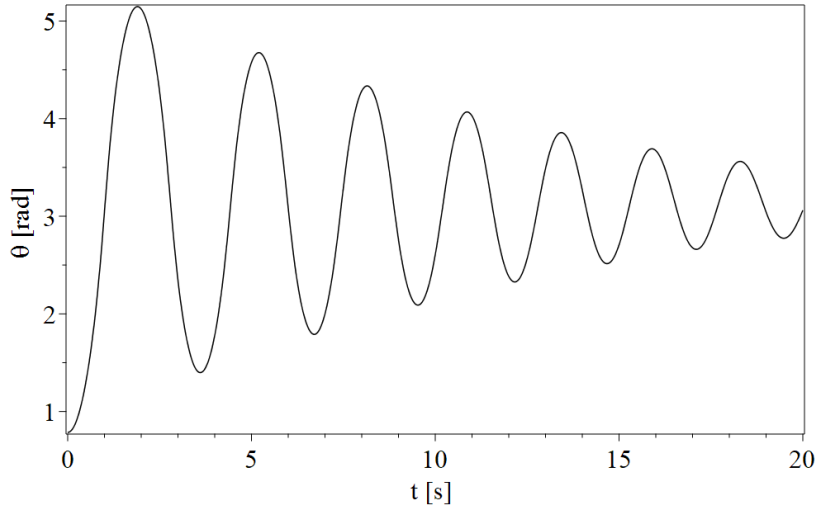


Figura 3.13: Posición angular del péndulo invertido bajo el efecto de la fricción.

En la figura 3.14 se muestra como la posición del carro tiende a su estado de condición inicial experimentando una parada cuando $t \rightarrow \infty$.

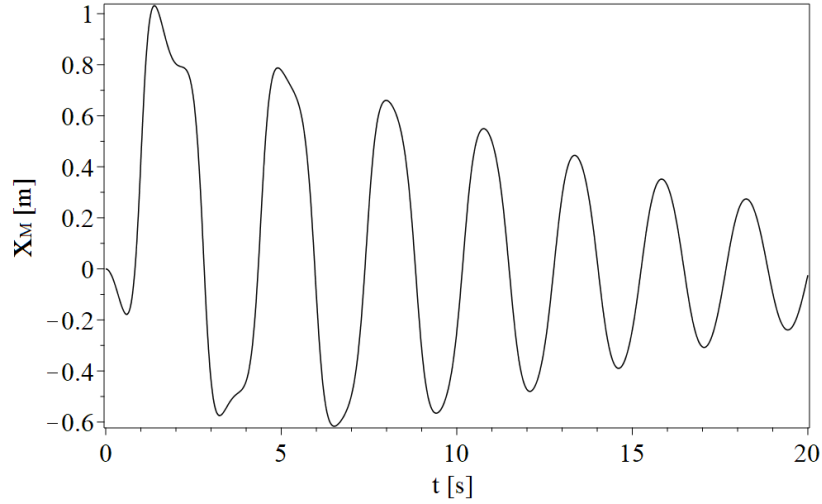


Figura 3.14: Posición horizontal del carro bajo el efecto de la fricción.

3.3.2. Análisis geométrico de estabilidad

Considerando el estudio teórico realizado en la sección 2.6, y teniendo en cuenta los dos grados de libertad considerados en el sistema, θ y x_M , se construye un tensor métrico

$$G = ml^2 d\theta \otimes d\theta + ml \cos \theta d\theta \otimes dx_M + ml \cos \theta dx_M \otimes d\theta + (M + m) dx_M \otimes dx_M, \quad (3.13)$$

con el cual, se define la métrica no singular y definida positiva

$$\mu = \begin{bmatrix} ml^2 & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & (M + m) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

En el estudio no se considera la fricción, solo trabajamos con las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas mediante la expresión (3.10). Con dichas ecuaciones de movimiento se obtiene un escalar de Ricci que define las curvaturas en el espacio de configuración del sistema; en este caso, se obtiene la métrica de Jacobi cuyo grado es de orden 2, equivalente a la dimensión del espacio de configuración del sistema $S = 2$, y por lo tanto, no presenta problemas en este sentido según las definiciones del método. Entonces, si se considera

$$a = ml^2, \quad b = ml, \quad c = M + m,$$

se obtiene a partir de la métrica de Jacobi un escalar de Ricci definido por la función de tres variables

$$f(\theta, \dot{\theta}, \dot{x}_M) = \frac{2bc\dot{\theta}\dot{x}_M \left[b\dot{\theta}\dot{x}_M (ac + \cos^4 \theta b^2 - 2\cos^2 \theta b^2) - \cos \theta (a\dot{\theta}^2 + c\dot{x}_M^2) (-ac + b^2) \right]}{(b^2 \cos^2 \theta - ac)^2 (c\dot{x}_M^2 + 2b \cos \theta \dot{\theta}\dot{x}_M + a\dot{\theta}^2)^3}, \quad (3.15)$$

con cuyo denominador

$$f_D(\theta, \dot{\theta}, \dot{x}_M) = (b^2 \cos^2 \theta - ac)^2 (c\dot{x}_M^2 + 2b \cos \theta \dot{\theta}\dot{x}_M + a\dot{\theta}^2)^3, \quad (3.16)$$

analizaremos sus singularidades y su influencia en el signo del escalar de Ricci mediante la figura 3.15, donde se aprecia dicha sección de la curvatura, considerando a θ y v_x ($v_x = \dot{x}_M$) como ejes en el rango $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ y $[-1, 1]$ m/s respectivamente. El eje z representa el signo de la curvatura.

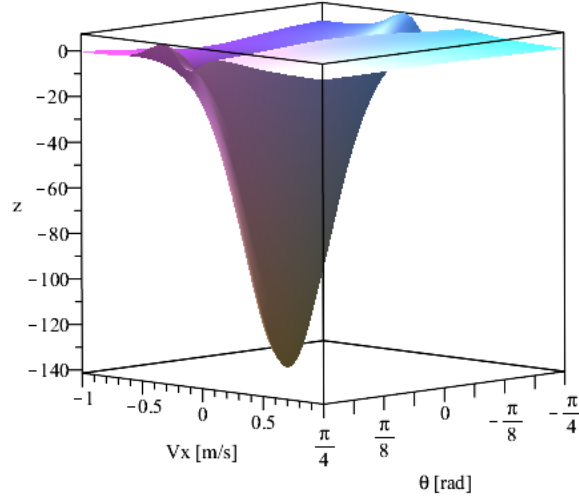


Figura 3.15: Sección de la curvatura de movimiento en el sistema del péndulo invertido en un carro.

Para obtener la figura 3.15, se ha evaluado $\dot{\theta} = 1$, por la razón de obtener un plano si se evaluara $\dot{\theta} = 0$, resultado que no tendría sentido en este estudio, donde el cambio de signo es el punto clave.

Como se aprecia, la curvatura tiene signos tanto positivos como negativos en z , con mayoría negativos. Este comportamiento de la curvatura, según el estudio realizado en la sección 2.6, especialmente teniendo en cuenta la definición presentada por Yahalom *et al.* [47], supone que el sistema será inestable. En este sentido, la selección de condiciones iniciales se hará teniendo en cuenta el tramo de curvatura positivo.

Enfocados en hacer una selección de condiciones iniciales que garanticen la estabilidad, teniendo en cuenta el rango de signos propiciado por el escalar de Ricci, se realiza un estudio de la densidad del escalar de Ricci en dos dimensiones, siendo θ y v_x los ejes de un plano en la vecindad $z(0^+)$ como se muestra en la figura 3.16. Con este gráfico se facilita la visualización de las zonas donde se pueden elegir condiciones iniciales, las cuales al ser consideradas, no provocan la inestabilización del sistema en su correspondiente estado inicial.

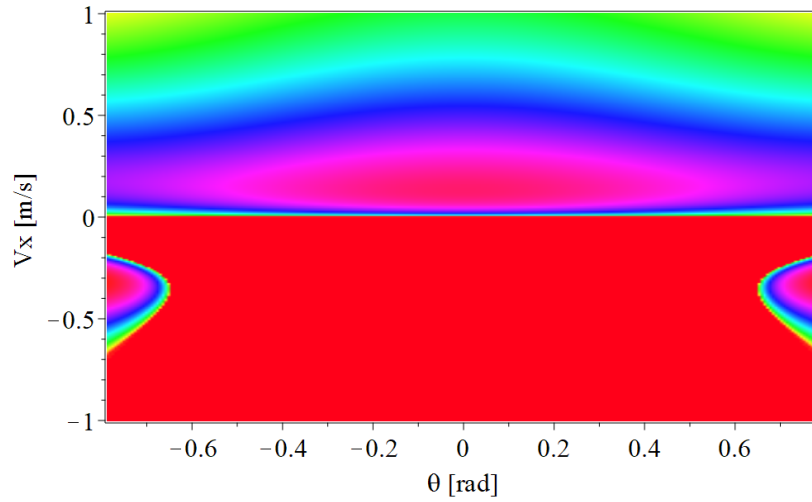


Figura 3.16: Densidad del escalar de Ricci en el sistema del péndulo invertido en un carro.

El área representada por el color verde, da una idea de la mejor zona para elegir condiciones iniciales, al contrario del área representada por el color rojo o por el color azul. Por ejemplo, suponiendo que el carro se mueve a $v_x(0) = 1$ m/s, la posición del péndulo θ podrá variar en un rango seguro de $[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}]$, de forma tal que no pierde la estabilidad.

Capítulo 4.

Sistemas de levitación magnética

Considerando que el análisis de la dinámica propia de un sistema es fundamental en el estudio de Lagrangianos controlados, en este capítulo realizamos dicho análisis en dos sistemas de levitación magnética, los cuales, son el objeto de estudio fundamental de este trabajo. Tanto en el sistema del anillo de Thomson como en el de la esfera con una bobina superior, se explica su principio de funcionamiento basado en las leyes fundamentales del electromagnetismo, se hace un reconocimiento de los grados de libertad que se emplearán en el estudio, y a partir de ellos, se construye la expresión Lagrangiana natural que representa energéticamente a cada sistema. También se obtienen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange a partir de la expresión Lagrangiana mencionada, a las cuales llamaremos ecuaciones de movimiento no controladas, que emplearemos en el Capítulo 5 a la hora de definir una ley de control mediante Lagrangianos controlados.

La simulación de la dinámica natural de estos sistemas de levitación magnética, permitirá comprobar la veracidad de las ecuaciones de movimiento obtenidas, además, servirá para comparar la dinámica controlada una vez establecida la ley de control. En este capítulo se toman algunos casos de estudio para realizar esta actividad.

Finalmente en el capítulo, se realiza un análisis geométrico de estabilidad en cada sistema, siendo un estudio hasta ahora no implementado en sistemas de levitación magnética; por lo tanto, constituye una novedad del trabajo que sin dudas, a generado conocimientos.

4.1. Anillo de Thomson

El sistema está constituido por un núcleo ferromagnético infinito en posición vertical y con permeabilidad magnética mayor a la del aire circundante, al cual se le enrolla en la parte inferior una bobina de alambre conductor con características determinadas, y a cierta separación superior de esta, se coloca un anillo construido con un conductor no magnético de masa m con dimensiones finitas. En la figura 4.1 se aprecia un diagrama esquemático del sistema, el cual contiene los elementos constructivos que se han nombrado anteriormente.

Su principio de funcionamiento se basa en los conceptos elementales de la teoría electromagnética [39, 43, 76], demostrado cuando se aplican las ecuaciones de Maxwell en forma integral. Dicho esto, y en base a las características constructivas del sistema, se deduce lo siguiente:

Al circular una corriente alterna i_1 por la bobina aparece un campo magnético \mathbf{H}_1 asociado a dicha corriente, cambiante en el tiempo y canalizado en el núcleo ferromagnético; esta relación se explica a través de la ley de Maxwell-Ampère en estado cuasiestático

$$\oint_{C_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} da, \quad (4.1)$$

aplicada en una superficie abierta S_1 delimitada por una curva cerrada C_1 . Entonces, teniendo en cuenta que el término derecho de la expresión (4.1) es la corriente total i_1 que circula por la curva cerrada C_1 , dicha expresión puede escribirse como

$$\oint_{C_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = i_1. \quad (4.2)$$

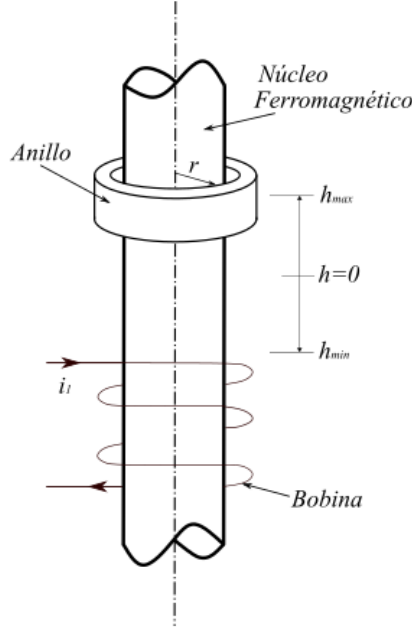


Figura 4.1: Anillo de Thomson.

Luego, el flujo magnético Φ_{m_1} que atraviesa el anillo expresado en términos de la inducción magnética \mathbf{B}_1 que lo genera, y considerando que este fluye a través de una superficie abierta S_2 delimitada por una curva cerrada C_2 con unidad normal, se define como

$$\Phi_{m_1} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (4.3)$$

Cuando este flujo es cambiante en el tiempo se induce un campo eléctrico \mathbf{E}_2 alrededor del anillo, circulando por una curva cerrada C_3 , cuya integral de línea define la fuerza electromotriz

$$\epsilon = \oint_{C_3} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.4)$$

Esta fuerza electromotriz generada, es proporcional a las variaciones temporales del flujo magnético Φ_{m_1} , definida por la ley de inducción de Faraday

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_{m_1}}{dt}, \quad (4.5)$$

cuyo signo negativo está en correspondencia con la ley de Lenz, la cual establece que la fuerza electromotriz generada, y por consiguiente, la corriente que aparece por su causa, tendrán una dirección opuesta a la del flujo magnético cambiante en el circuito [39]. Empleando la ley de Ohm como se muestra en [43]

$$\mathbf{J}_2 = \sigma \mathbf{E}_2, \quad (4.6)$$

donde σ es la conductividad uniforme en el anillo, se puede afirmar que la fuerza electromotriz ϵ cambiante en el tiempo produce un flujo de corriente i_2 con densidad \mathbf{J}_2 en el anillo, al cual se asocia un campo magnético \mathbf{H}_2 . Al igualar las expresiones (4.4) y (4.5) teniendo en cuenta la sustitución de la expresión (4.3) en la expresión (4.5), se obtiene la expresión que define la ley de Faraday

$$\oint_{C_3} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} da. \quad (4.7)$$

Como los sentidos de las corrientes i_1 e i_2 son opuestos, los campos magnéticos asociados a cada una provocarán un efecto de repulsión en el circuito, traducido como el efecto de una fuerza actuando en el anillo

$$F_v = \rho (\mathbf{E}_2 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_2), \quad (4.8)$$

donde el subíndice v indica que \mathbf{E}_2 es una densidad de fuerza por unidad de volumen; aquí, el producto $\mathbf{J}_2 = \rho \mathbf{v}$ se conoce como densidad de corriente, y ρ como la densidad de carga. Esta expresión obtenida a partir de la ley de la fuerza de Lorentz, es aplicable a situaciones donde existen un gran número de partículas cargadas en movimiento [77], como es el caso del sistema electromagnético del anillo de Thomson, donde la densidad de fuerza puede definirse como

$$F_v = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_2. \quad (4.9)$$

Dicha fuerza debe oponerse al propio peso del anillo para permitir finalmente que levite; su magnitud depende del campo magnético \mathbf{H}_2 , de la corriente i_2 y de las características constructivas del sistema, como por ejemplo, las dimensiones del anillo y el número de vueltas en la bobina [78]. En la figura 4.2 se aprecia la distribución esquemática de los campos magnéticos en el sistema, mostrando sus respectivos sentidos en correspondencia con las corrientes y considerando el medio ferromagnético mediante la relación constitutiva $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

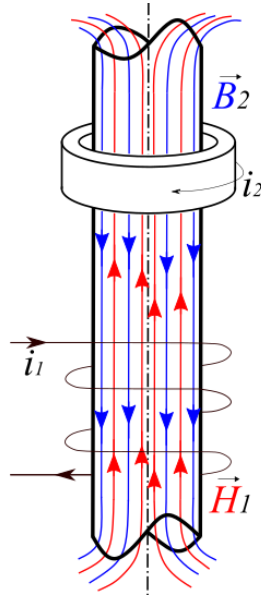


Figura 4.2: Comportamiento de los campos magnéticos en el anillo de Thomson.

Si la bobina fuese alimentada con corriente directa constante, no se induciría corriente en el anillo al no existir campos magnéticos cambiantes en el tiempo, por lo tanto, tampoco

existiría interacción entre dichos campos magnéticos provocando que el fenómeno de levitación magnética no tenga sentido.

Un detalle que no se debe obviar en el análisis del principio de funcionamiento del sistema, corresponde al calentamiento del anillo por el efecto Joule, dado por la propia corriente inducida i_2 y la resistencia del material, tomada en el estudio como R_2 . Como se plantea en el trabajo experimental de Baylie *et al.* [78], si se reduce la temperatura en el anillo disminuye su resistencia, y por lo tanto, aumenta la corriente i_2 provocando un crecimiento en la fuerza de \mathbf{H}_2 , lo cual permite que el anillo se eleve más alto. En los trabajos presentados por Wang *et al.* [79], Riski *et al.* [80] y Shioti *et al.* [81], atacan este efecto indeseable traducido en pérdidas de energía mediante estudios de superconductividad, con resultados relevantes y que propician en sí, un campo de investigación en la rama de la levitación magnética aplicada.

4.1.1. Construcción del Lagrangiano natural del sistema

La construcción del Lagrangiano natural del sistema se basa en presentar el formalismo Lagrangiano como se define en la expresión (2.1). Este formalismo Lagrangiano desde el punto de vista matemático, como ya es conocido, está compuesto por la diferencia entre la suma de todas las energías cinéticas y la suma de todas las energías potenciales consideradas. Toma el nombre de Lagrangiano natural por el hecho de que no se hacen cambios desde el punto de vista geométrico en las expresiones que lo conforman, o bien, en la dinámica natural del sistema sin considerar perturbaciones u otras fuerzas externas.

Para llevar a cabo la construcción de la expresión Lagrangiana, se hará un reconocimiento de los grados de libertad que se van a considerar en el sistema, para luego definir las expresiones energéticas que conforman finalmente la expresión.

Reconocimiento de los grados de libertad

Los grados de libertad que se tendrán en cuenta para el estudio del sistema, son definidos como el número mínimo de coordenadas generalizadas independientes necesarias para definir el estado cinemático de un mecanismo o sistema electromecánico. El número de grados de libertad coincide con el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento.

Para efectuar este estudio se establecen tres grados de libertad, los cuales, son tomados atendiendo a las siguientes consideraciones:

- **h.** Altura o posición del anillo en el eje vertical.

Solo se considera la variación de la posición del anillo en el eje vertical, excluyendo otros posibles grados de libertad como podrían ser la variación de la posición horizontal y angular. La selección de este único grado de libertad con respecto a las posiciones simplifica el estudio; para los objetivos del mismo, enfocados en lograr el control del sistema, sería suficiente, además, por el hecho de estar el anillo rodeando al núcleo, no existirán variaciones considerables en su posición horizontal. El par en coordenadas generalizadas de este grado de libertad se define como (h, \dot{h}) , siendo \dot{h} la velocidad del anillo considerada más adelante como \mathbf{v} .

- **q₁.** Carga eléctrica en la bobina.

Seleccionar este grado de libertad y no la corriente i_1 que circulará por la bobina, permitirá analizar al sistema como de primer orden en las corrientes, empleando el movimiento de cargas $\dot{q}_1 = -\dot{q}_1$, cuando realmente las corrientes se estudiarán de la forma $\dot{i}_1 = -\dot{q}_1$, siendo el sistema de segundo orden en las cargas. Esto implica que (i_1, \dot{i}_1) , o (\dot{q}_1, \ddot{q}_1) ,

sea el par en coordenadas generalizadas para este grado de libertad, y por consiguiente, pueda emplearse en el sistema de primer orden.

- **q₂.** Carga eléctrica en el anillo.

Este grado de libertad se selecciona de forma análoga según el procedimiento expuesto anteriormente para definir a q_1 ; en este caso, también conviene analizar al sistema como de primer orden en las corrientes. De este modo, se garantiza que (i_2, \dot{i}_2) , o (\dot{q}_2, \ddot{q}_2) sea el par en coordenadas generalizadas para este grado de libertad.

Definición de funciones energéticas

El análisis detallado de funciones energéticas en el sistema, de acuerdo al carácter cinético o potencial en cada elemento, permite que la expresión Lagrangiana se adapte en mayor medida a la dinámica real que se desea estudiar. A continuación, se definirán las funciones energéticas en cada elemento, y posteriormente, se escribirá la expresión lagrangiana natural del sistema.

- **Bobina**

Considerando que la bobina se encuentra fija, es decir, que su posición no varía a lo largo del núcleo ferromagnético, solo tendrá una componente energética

$$E_1 = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2, \quad (4.10)$$

donde L_1 es la inductancia en la bobina. Esta expresión se puede definir como la energía cinética asociada al movimiento de cargas en la bobina (Consultar la sección 2.3); a partir de aquí, se define $T_1 = E_1$, en relación a la notación empleada en el trabajo.

- **Anillo**

Teniendo en cuenta que el anillo levitará a una altura determinada h , tendrá una componente de energía potencial

$$U = mgh, \quad (4.11)$$

donde m es la masa del anillo y g la constante de aceleración gravitatoria.

Como también se considerarán variaciones en la altura debido al comportamiento natural del sistema, existirá un movimiento en sentido vertical definido como la energía cinética

$$T_{2_1} = \frac{1}{2} m \dot{h}^2. \quad (4.12)$$

Finalmente, solo faltaría incluir la componente de energía cinética

$$T_{2_2} = \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2, \quad (4.13)$$

donde L_2 es la inductancia en el anillo. Esta expresión se asocia al movimiento de cargas en el anillo, de forma similar a la presentada en la expresión (4.10).

- **Acople**

El acoplamiento energético entre los elementos del sistema, constituye un componente fundamental dentro de la expresión Lagrangiana; de no existir una función energética que relacione la dinámica conjunta de los elementos, el análisis del sistema desde el punto de vista físico-matemático arrojará resultados de sistemas observados por separado.

Más aún, el estudio de sistemas mediante el formalismo Lagrangiano, permite establecer funciones de acoplamiento con una facilidad sumamente considerable en relación a las que se podrían obtener mediante los diagramas de fuerzas empleados en la mecánica clásica. Una idea de como definir funciones de acoplamiento en sistemas Euler-Lagrange se presenta en la sección 2.5. Esta es una herramienta que también facilita el estudio de sistemas con campo magnético.

Para este caso se definirá L_{12} como la inductancia mutua entre el anillo y la bobina, siendo una función de la altura h de acuerdo a los modelos presentados por Barry *et al.* [5] y Jiménez *et al.* [6]. Se hará la aproximación de $L_{12}(h)$ mediante el truncamiento de la serie de Taylor descrito en la sección 2.5. Dicho esto, se define la expresión

$$T_{12} = L_{12}(h)\dot{q}_1\dot{q}_2, \quad (4.14)$$

la cual relaciona el movimiento de cargas tanto en el anillo como en la bobina, además de incluir la inductancia mutua como función de la altura $L_{12}(h)$. Esta expresión según su configuración, puede tomarse como la energía cinética debida al acoplamiento de elementos en el sistema.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se presenta el Lagrangiano natural del sistema

$$L = \frac{L_1\dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2\dot{q}_2^2}{2} + \frac{m\dot{h}^2}{2} + L_{12}(h)\dot{q}_1\dot{q}_2 - mgh, \quad (4.15)$$

con el cual, se obtendrán seguidamente las ecuaciones de movimiento del sistema, a partir de derivar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

4.1.2. Obtención de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de este sistema se obtendrán aplicando la expresión (2.4), conocida como la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas.

De este modo, se definen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial L}{\partial h} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (4.17)$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0. \quad (4.18)$$

Como se observa, existe una equivalencia entre el número de ecuaciones que se resolverán y el número de grados de libertad considerados en el sistema.

Entonces, desarrollando la expresión (4.16):

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{d}{dh} L_{12}(h)\dot{q}_1\dot{q}_2 - mg \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = m\ddot{h}, \quad (4.20)$$

se obtiene la primera ecuación de movimiento (asociada a h), definida como

$$m\ddot{h} = \frac{d}{dh} L_{12}(h)\dot{q}_1\dot{q}_2 - mg. \quad (4.21)$$

Luego, desarrollando la expresión (4.17):

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = L_1 \ddot{q}_1 + L_{12}(h) \ddot{q}_2 - \frac{d}{dh} L_{12}(h) \dot{q}_2 \dot{h}, \quad (4.23)$$

se obtiene la segunda ecuación de movimiento (asociada a q_1), definida como

$$L_1 \ddot{q}_1 = \frac{d}{dh} L_{12} \dot{q}_2 \dot{h} - L_{12}(h) \ddot{q}_2. \quad (4.24)$$

Finalmente, desarrollando la expresión (4.18):

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = L_2 \ddot{q}_2 + L_{12}(h) \ddot{q}_1 - \frac{d}{dh} L_{12}(h) \dot{q}_1 \dot{h}, \quad (4.26)$$

se obtiene la tercera ecuación de movimiento (asociada a q_2), definida como

$$L_2 \ddot{q}_2 = \frac{d}{dh} L_{12} \dot{q}_1 \dot{h} - L_{12}(h) \ddot{q}_1. \quad (4.27)$$

Teniendo en cuenta las expresiones

$$i_1 = -\dot{q}_1 \quad (4.28)$$

$$i_2 = -\dot{q}_2 \quad (4.29)$$

y

$$v = \dot{h}, \quad (4.30)$$

las expresiones (4.21)-(4.27) se escriben como

$$m\dot{v} = \frac{d}{dh} L_{12} i_1 i_2 - mg - \beta v \quad (4.31)$$

$$L_1 \dot{i}_1 = \frac{d}{dh} L_{12} i_2 v - L_{12}(h) \dot{i}_2 - R_1 i_1 - U(t) \quad (4.32)$$

y

$$L_2 \dot{i}_2 = \frac{d}{dh} L_{12} i_1 v - L_{12}(h) \dot{i}_1 - R_2 i_2, \quad (4.33)$$

donde se observa que ya quedan escritas en términos de las corrientes i_1 e i_2 y de la velocidad v , facilitando así los estudios posteriores. Los términos señalados en azul corresponden a la influencia de términos disipativos: β para representar la fricción del anillo con el núcleo ferromagnético, R_1 y R_2 para representar el efecto Joule en la bobina y el anillo respectivamente; estos términos no surgen naturalmente de las ecuaciones de movimiento obtenidas, pero si será necesaria su consideración en el estudio de la dinámica propia del sistema.

4.1.3. Simulaciones de la dinámica propia del sistema

Hasta el momento, se ha estudiado el sistema del anillo de Thomson considerando las funciones energéticas que conforman el Lagrangiano natural, y que por demás, garantizan las condiciones para la levitación magnética. Solo se han incluido parámetros circuitales en el sistema referentes a las inductancias, propias y mutua, pero como parte de este estudio, y garantizando que todo análisis cumpla con la dinámica real, se deben incluir otros parámetros circuitales como las resistencias y fuente de alimentación. En este sentido, las resistencias R_1 y R_2 , propias del conductor utilizado en la bobina y el anillo respectivamente, junto al coeficiente de fricción β propio del efecto del aire y del posible rozamiento mínimo del anillo con el núcleo, constituyen los términos disipativos que se agregarán a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas; por otra parte, la fuente de alimentación de corriente alterna $U(t)$ solo se agrega para tener en ella una variable de control que podría modificarse desde el punto de vista geométrico, no siendo empleada en las siguientes simulaciones, para las cuales será siempre nula y solo se considerará un valor inicial de corriente en la bobina.

Las simulaciones que se realizan a continuación tienen como objetivo fundamental observar el comportamiento de algunas variables del sistema, y por lo tanto, arribar a conclusiones de acuerdo al comportamiento dinámico del mismo. Se analizarán las variables h e i_1 , ambas en base a su comportamiento en el tiempo.

Se tomarán tres casos de estudio enmarcados en el modelo dinámico del sistema, donde en cada uno se hará una variación de los parámetros circuitales seleccionados de manera arbitraria, es decir, aún no se considerarán valores reales obtenidos experimentalmente; el comportamiento físico del sistema puede ser simulado hasta ahora sin considerar ciertas exactitudes, de forma tal que se pueda observar la conservación de energía en este según el Lagrangiano natural construido.

Caso de estudio I

En este caso no se tendrán en cuenta los términos disipativos R_1, R_2 y β , los cuales representarán al sistema operando como caso ideal. Los demás parámetros que se consideran son: $L_1 = 1$ H, $L_2 = 1$ H, $L_{12_0} = 0$, $L'_{12} = 0.05$ H, $g = 9.81$ m/s² y $m = 0.5$ kg, incluyendo condiciones iniciales $i_1(0) = 100$ A, $i_2(0) = 0$, $h(0) = 0.4$ m y $v(0) = 0$. El tiempo empleado en las simulaciones será $t = 20$ s.

En la figura 4.3, se aprecia como el anillo levita a una altura oscilante con límite superior constante definido por la condición inicial, y con límite inferior también constante definido en términos energéticos como un punto de máxima energía cinética y mínima energía potencial, en el cual, el sistema está bajo la acción de una fuerza magnética máxima, y por tanto, el anillo comienza a elevarse nuevamente partiendo de una velocidad $v = 0$.

El comportamiento de no sobrepasar la altura máxima definida por la condición inicial, se debe a que en el sistema no actúan otras fuentes de energía distintas a las que ya posee, entendiéndose esto como el cumplimiento de la ley de conservación de la energía, propiciada además en este caso, por la ausencia de fricción y de términos disipativos en el sistema.

Cuando el anillo se coloca a una altura inicial h_0 como se aprecia en la figura 4.3, el sistema solo cuenta con una corriente inicial que no varía en el tiempo, y por consiguiente, no existirá variación temporal del campo magnético inducido como establece la expresión (4.2), de este modo, tampoco existirá un flujo magnético cambiante en el tiempo capaz de inducir un campo eléctrico en el anillo como establece la expresión (4.4), y por lo tanto, no existirá una corriente i_2 cambiante en el tiempo capaz de inducir un campo magnético \mathbf{B}_2 que se oponga al existente propiciando que no exista una fuerza magnética que contrarreste el peso del anillo, entonces, el

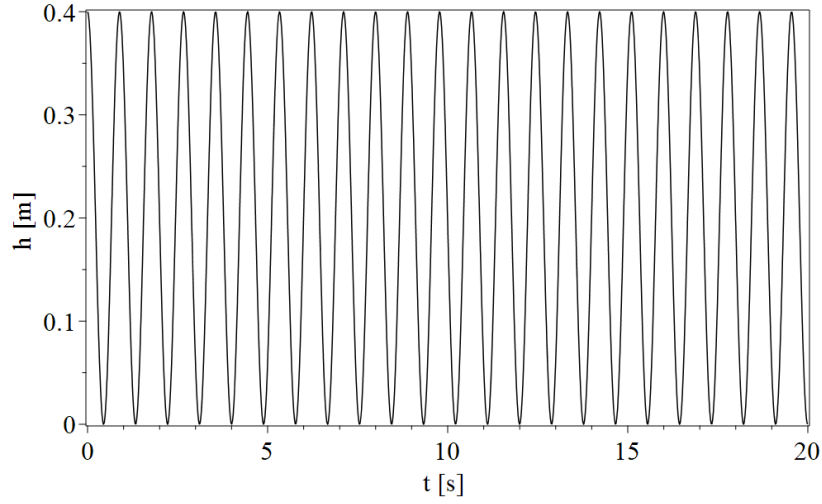


Figura 4.3: Comportamiento natural de la altura del anillo de Thomson.

anillo cae. Luego, cuando el anillo va cayendo adquiere un movimiento con respecto a la bobina, y según establece la ley de Faraday explicada por Jackson [39], en el anillo existirá un flujo magnético que en este caso se opondrá al existente y así, puede inducirse en el, una corriente i_2 según la ley de Ohm en la expresión (4.6), a partir de la fuerza electromotriz producida por la variación temporal del flujo magnético como se muestra en la expresión (4.5). En el punto que el anillo experimenta una compensación de la fuerza magnética con respecto a su propio peso, comienza a elevarse haciendo que cambie la dirección del flujo magnético inducido en la bobina y así, la dirección del campo eléctrico que produce la fuerza electromotriz en el anillo; al alejarse de la bobina, la corriente inducida i_2 experimentará un decrecimiento que provoca la disminución de la fuerza magnética de sustentación, hasta un punto máximo de altura donde dicha fuerza es nula. A partir de aquí, el sistema se comporta de forma oscilatoria repitiendo todo el proceso en cada ciclo. En las figuras 4.4 y 4.5 se muestra el comportamiento de las corrientes en el sistema en relación con lo explicado anteriormente.

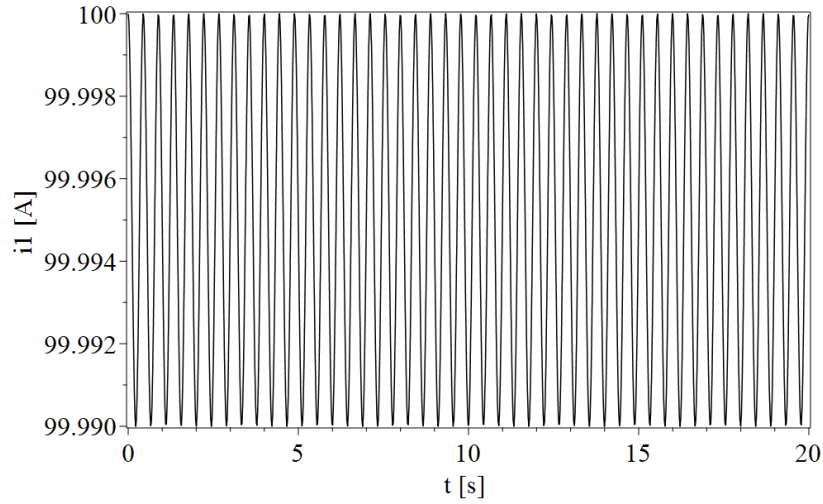


Figura 4.4: Comportamiento natural de la corriente por la bobina. Sistema del anillo de Thomson.

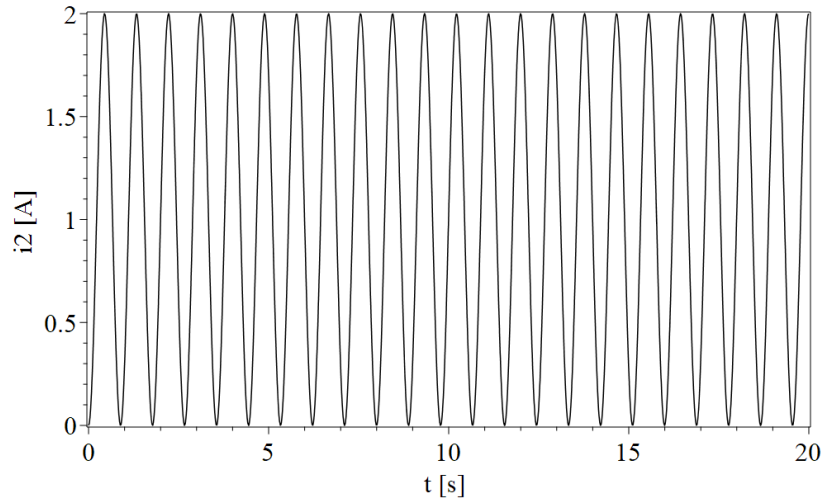


Figura 4.5: Comportamiento natural de la corriente inducida en el anillo de Thomson.

Para observar el comportamiento de $h(t)$ vs. $v(t)$ se traza su correspondiente plano de fase, mostrado en la figura 4.6. Este plano de fase puede dar una idea de la estabilidad del sistema, aunque en este sentido no se hace ningún estudio en esta sección. El análisis de estabilidad del sistema, se presenta en la sección siguiente realizado desde el punto de vista geométrico.

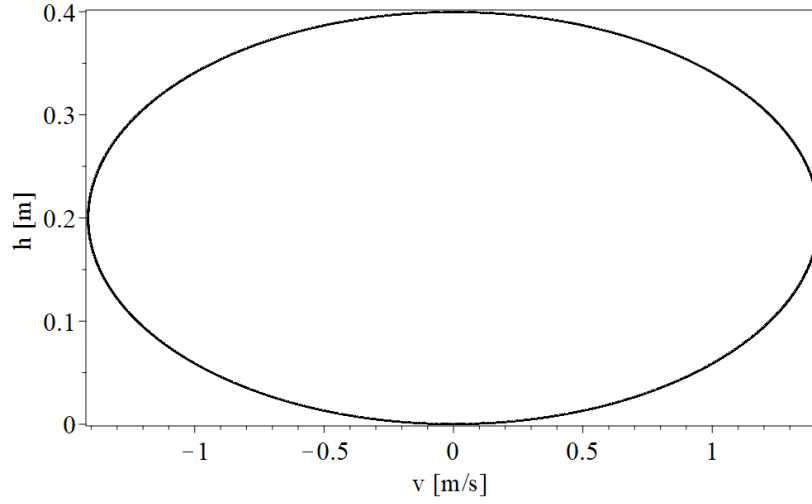


Figura 4.6: Plano de fase correspondiente a la dinámica natural del anillo de Thomson.

Caso de estudio II

En este caso tampoco se tendrán en cuenta los términos disipativos R_1 y R_2 , pero en cambio, si se considera un coeficiente de fricción $\beta = 0.5$. Los demás parámetros que se consideran son: $L_1 = 1$ H, $L_2 = 1$ H, $L_{12_0} = 0$, $L'_{12} = 0.05$ H, $g = 9.81$ m/s² y $m = 0.5$ kg, incluyendo condiciones iniciales $i_1(0) = 100$ A, $i_2(0) = 0$, $h(0) = 0.4$ m y $v(0) = 0$. El tiempo empleado en las simulaciones será $t = 20$ s.

En la figura 4.7, se aprecia como el anillo comienza a levitar a una altura oscilante, de igual forma como ocurrió en el caso de estudio I, pero a su vez dicha altura, experimenta una disminución en su amplitud hasta permanecer prácticamente constante en el tiempo, hecho que es muy conveniente según los fines prácticos con que se utilizan sistemas de este tipo, y por consiguiente, representa el comportamiento dinámico que se desea tenga el sistema al obtener su Lagrangiano controlado, con el cual, se logrará mantener la estabilidad.

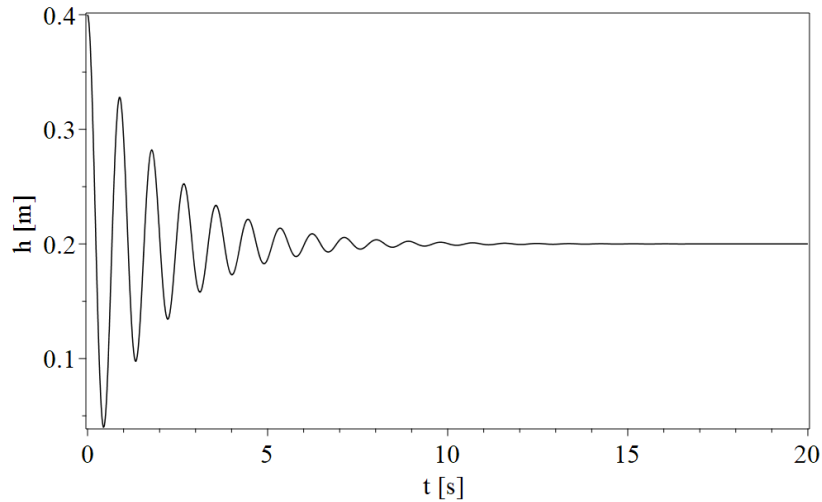


Figura 4.7: Comportamiento de la altura del anillo de Thomson considerando fricción.

Este comportamiento se debe a la ausencia de disipación en las resistencias eléctricas, pero especialmente, a la inserción del coeficiente β como un parámetro físico que representa el efecto de la fricción ya descrito. Poco a poco se alcanza la compensación entre la fuerza magnética producida en el anillo y la fuerza gravitatoria con que este es atraído hacia la superficie, haciendo que finalmente levite sin oscilaciones ruidosas. Las corrientes i_1 e i_2 , cuyo comportamiento se aprecia en las figuras 4.8 y 4.9 respectivamente, también experimentan un comportamiento oscilatorio al inicio, pero en la medida que pasa el tiempo, se estabilizan en un punto constante.

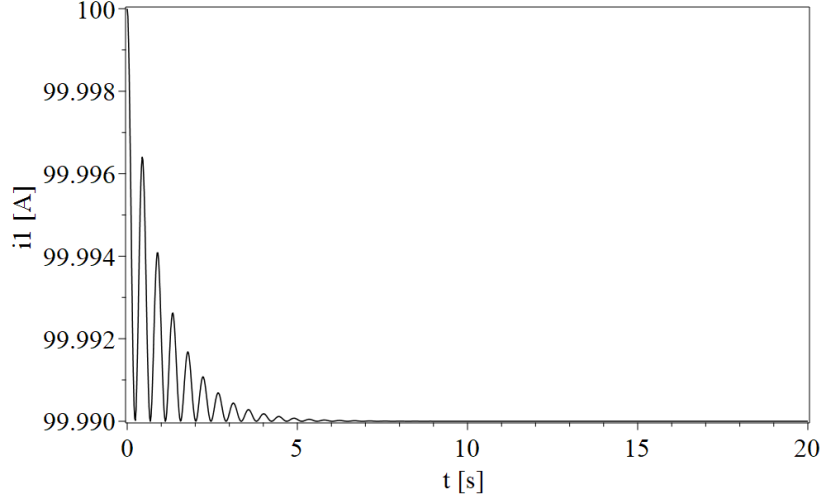


Figura 4.8: Comportamiento de la corriente por la bobina considerando fricción. Sistema del anillo de Thomson.

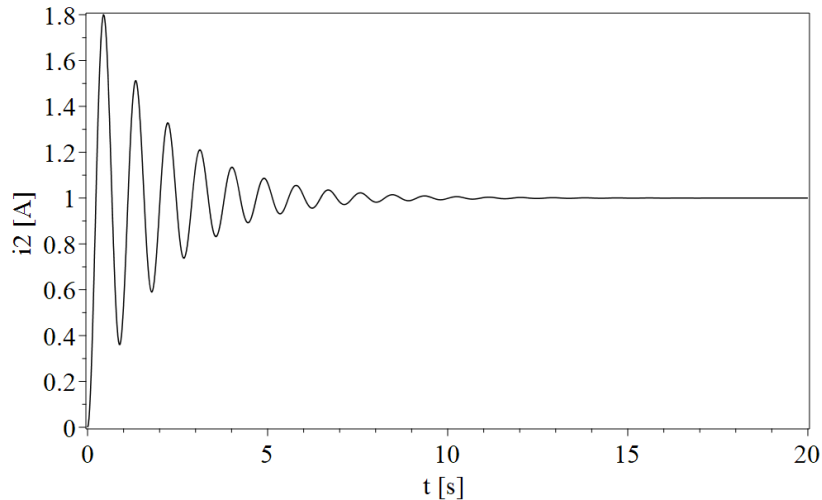


Figura 4.9: Comportamiento de la corriente inducida en el anillo de Thomson considerando fricción.

Para observar el comportamiento de $h(t)$ vs. $v(t)$ se traza nuevamente su correspondiente plano de fase, mostrado en la figura 4.10. En este plano de fase, a diferencia del mostrado en la figura 4.6, se observa una altura constante, sin variaciones en la velocidad del anillo alrededor

de ese punto. Un plano de fase como este, es el que se necesita obtener cuando se aplique el estudio de Lagrangianos controlados.

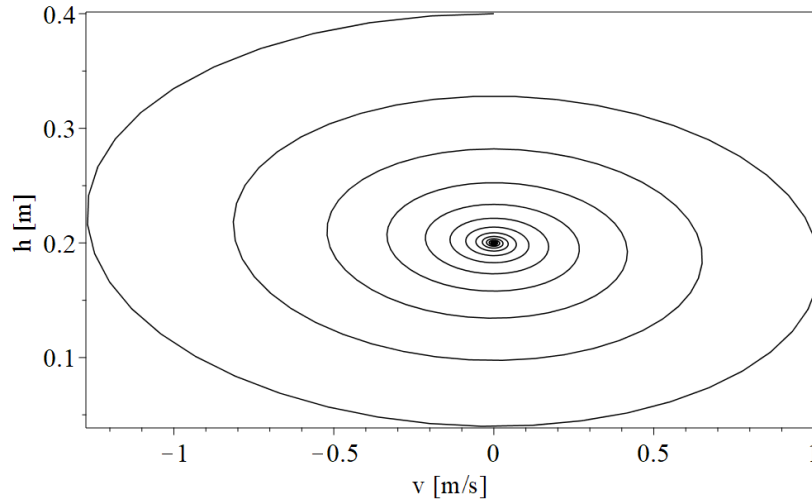


Figura 4.10: Plano de fase correspondiente a la dinámica del anillo de Thomson considerando fricción.

Caso de estudio III

En este caso si se tendrán en cuenta los términos disipativos $R_1 = 0.1 \Omega$, $R_2 = 0.1 \Omega$ y $\beta = 0.5$. Los demás parámetros que se consideran son: $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 1 \text{ H}$, $L_{12_0} = 0$, $L'_{12} = 0.05 \text{ H}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y $m = 0.5 \text{ kg}$, incluyendo condiciones iniciales $i_1(0) = 100 \text{ A}$, $i_2(0) = 0$, $h(0) = 0.4 \text{ m}$ y $v(0) = 0$. El tiempo empleado en las simulaciones será $t = 20 \text{ s}$.

En la figura 4.11, se aprecia como el anillo comienza a levitar a una altura oscilante hasta un relativo corto período de tiempo, donde cae paulatinamente.

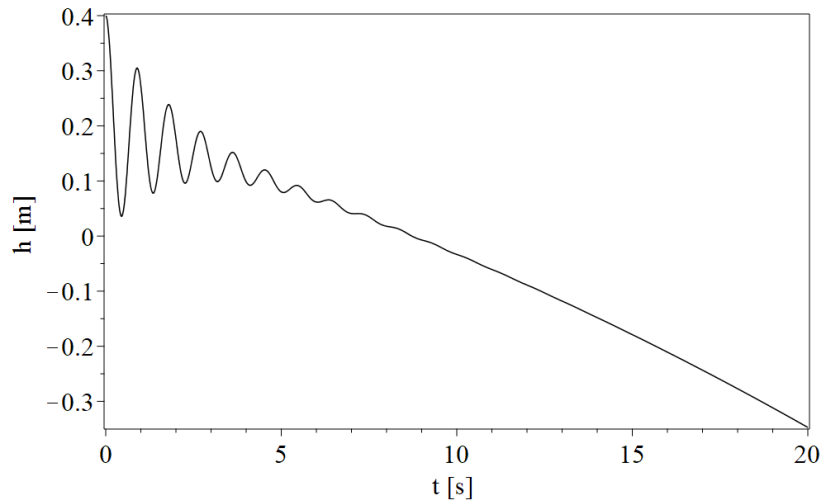


Figura 4.11: Comportamiento de la altura del anillo de Thomson considerando fricción y disipación en el circuito.

Este comportamiento se debe a las resistencias consideradas, provocando que en el anillo aumente la temperatura y disminuya su conductividad; en consecuencia, la corriente i_2 también disminuye y por lo tanto, se pierde la compensación entre la fuerza magnética producida en el anillo y la fuerza gravitatoria con que este es atraído hacia la superficie. En dichas resistencias se disipa la energía con la que el sistema comienza a operar, y por el hecho de no tener fuente que la restablezca, el anillo cae. Esto demuestra que dichas resistencias influyen en la inestabilización del sistema. El comportamiento de las corrientes i_1 e i_2 , se muestra en las figuras 4.12 y 4.13 respectivamente.

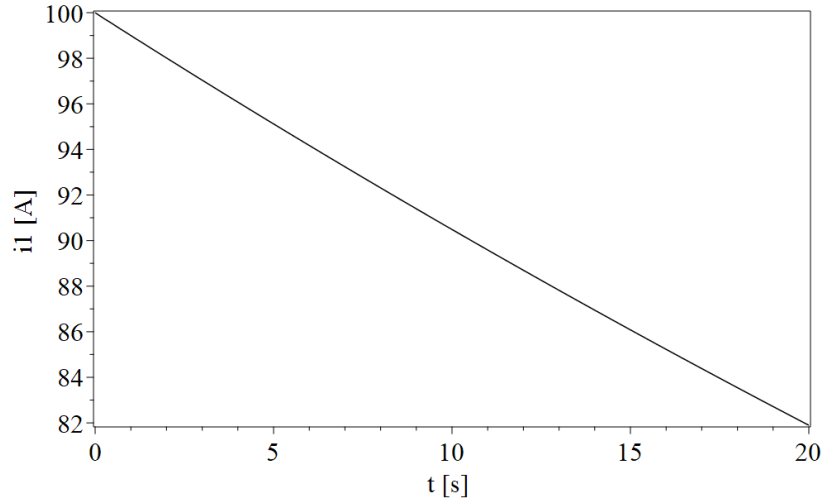


Figura 4.12: Comportamiento de la corriente por la bobina considerando fricción y disipación. Sistema del anillo de Thomson.

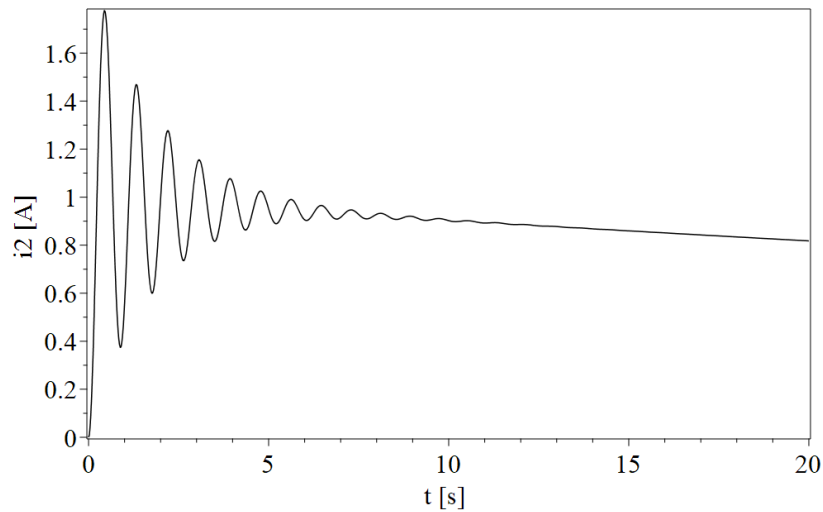


Figura 4.13: Comportamiento de la corriente inducida en el anillo de Thomson considerando fricción y disipación.

Como en los anteriores casos de estudio, estas corrientes experimentan un comportamiento oscilatorio al inicio, pero en la medida que pasa el tiempo y bajo la acción de las resistencias colocadas, decrecen paulatinamente según va cayendo el anillo.

En este caso de estudio también se traza el plano de fase correspondiente a $h(t)$ vs. $v(t)$ para analizar el comportamiento del sistema desde ese punto de vista. Lo particular de este plano de fase, mostrado en la figura 4.14, es que muestra a simple vista que el sistema se inestabiliza ante la acción de la fricción y la disipación, al no tener el sistema una fuente compensadora que regule su comportamiento.

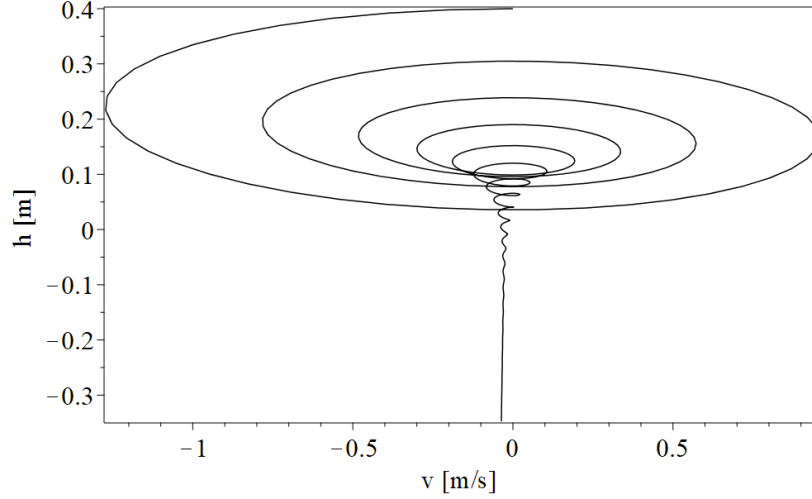


Figura 4.14: Plano de fase correspondiente a la dinámica del anillo de Thomson considerando fricción y disipación.

4.1.4. Análisis geométrico de estabilidad

Partiendo del estudio teórico realizado en la sección 2.6 y considerando los tres grados de libertad definidos en el sistema, se construye el tensor geométrico

$$G = L_1 dq_1 \otimes dq_1 + L_2 dq_2 \otimes dq_2 + L_{12}(h) dq_1 \otimes dq_2 + L_{12}(h) dq_2 \otimes dq_1 + m dh \otimes dh, \quad (4.34)$$

con el cual, se define la métrica no singular definida positiva

$$\mu = \begin{bmatrix} L_1 & L_{12}(h) & 0 \\ L_{12}(h) & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

En este estudio de estabilidad desde el punto de vista geométrico, consideramos emplear la aproximación de $L_{12}(h)$ mediante el truncamiento de la serie de Taylor, descrito en la sección 2.5. No se considera la disipación en el sistema, o sea, solo se trabaja con las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas a partir de la expresión Lagrangiana natural conservativa en la expresión (4.15); con estas ecuaciones y a partir de la métrica de Jacobi, se obtiene un escalar de Ricci que define las curvaturas en el espacio de configuración del sistema, dado como una función de cuatro variables $f(i_1, i_2, h, v)$. Las singularidades de esta función seccionalizada, debido a su tamaño, se analizan empleando su denominador

$$f_D(i_1, i_2, h, v) = 2(L_1 L_2 - L_{12}(h)^2)^2 (L_2 i_2^2 + m v^2 + 2L_{12}(h) i_1 i_2 + L_1 i_1^2)^3 m. \quad (4.36)$$

Puede notarse que el término $(L_1 L_2 - L_{12}(h)^2)$ en la expresión (4.36) es una singularidad de la función en dependencia del comportamiento de $L_{12}(h)$, considerando que L_1 y L_2 son constantes positivas.

Anulando la componente i_2 de f , con el objetivo de visualizar en la figura 4.15 los signos del escalar de Ricci en tres dimensiones, se evalúa $i_1 = 1$ A; los ejes h y v se consideran en los rangos $[-3, 3]$ m y $[-3, 3]$ m/s respectivamente. El eje z representa el signo de la curvatura.

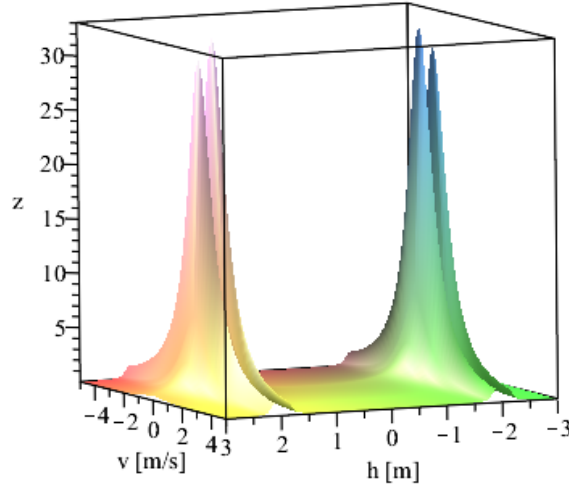


Figura 4.15: Sección de la curvatura de movimiento en el sistema del anillo de Thomson.

Como se aprecia, la curvatura en su totalidad tiene valores positivos en z de acuerdo a los rangos de h y v , los cuales fueron establecidos de forma tal, que incluyeran posibles condiciones iniciales cercanas a $h(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Este comportamiento de la curvatura, según el estudio realizado en la sección 2.6, especialmente teniendo en cuenta la definición presentada por Yahalom *et al.* [47], supone la estabilidad del sistema.

También se puede notar en la figura 4.15 las singularidades

$$h = \pm \frac{-L_{12_0} + \sqrt{L_1 L_2}}{L_p}, \quad (4.37)$$

las cuales dan una idea del rango de operación que se puede considerar para h teniendo en cuenta los parámetros seleccionados, o simplemente, en función de una altura específica a la que se pretenda levite el anillo.

En aras de hacer una selección de condiciones iniciales que garanticen la estabilidad, teniendo en cuenta el rango de signos propiciado por el escalar de Ricci, se realiza un estudio de la densidad del escalar de Ricci en dos dimensiones, siendo h y v los ejes de un plano en la vecindad $z(0^+)$ como se muestra en la figura 4.16. Con este gráfico se facilita la visualización de las zonas donde se pueden elegir condiciones iniciales, las cuales al ser consideradas, no provocan la inestabilización del sistema en su correspondiente estado inicial.

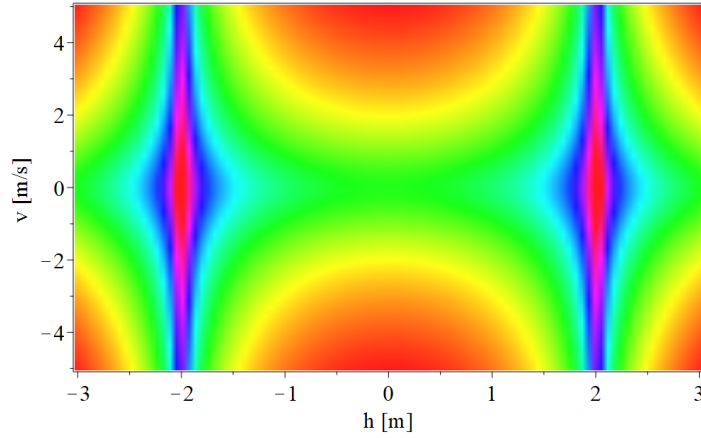


Figura 4.16: Densidad del escalar de Ricci en el sistema del anillo de Thomson.

El área central representada por el color verde da una idea de la mejor zona para elegir condiciones iniciales, al contrario del área representada por el color rojo o por el color azul. Por ejemplo, suponiendo que el anillo es colocado en una posición inicial $h_0 = 0$ con velocidad inicial $v(0) = 0$, su movimiento podrá variar en un rango seguro de $[-1, 1]$ m y $[-1, 1]$ m/s² para h y v respectivamente, de forma tal que no pierde la estabilidad.

4.2. Esfera con una bobina superior

El segundo sistema de levitación magnética que se estudia en este trabajo está constituido por un núcleo ferromagnético de proporciones finitas en posición vertical colocado en un plano superior sin movimiento, este núcleo tiene permeabilidad magnética mayor a la del aire circundante, al cual se le enrolla una bobina de alambre conductor con características determinadas. A cierta separación inferior al núcleo, se coloca una esfera ferromagnética maciza de masa m con dimensiones finitas. En la figura 4.17 se aprecia un diagrama esquemático del sistema, el cual contiene los elementos constructivos que se han nombrado anteriormente.

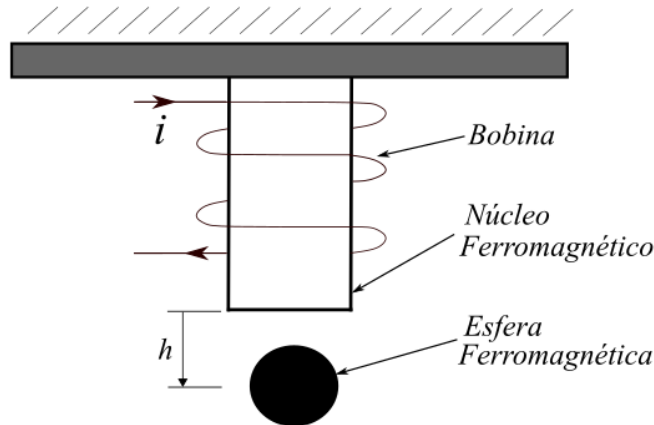


Figura 4.17: Esfera con una bobina superior.

Su principio de funcionamiento, de forma similar al descrito para el sistema del anillo de Thomson, se basa en los conceptos elementales de la teoría electromagnética [39, 43, 76],

demostrado cuando se aplican las ecuaciones de Maxwell en forma integral. Entonces, se deduce lo siguiente: Al circular una corriente alterna i por la bobina, aparece un campo magnético \mathbf{H}_1 asociado a dicha corriente, cambiante en el tiempo y canalizado en el núcleo ferromagnético; esta relación se explica a través de la ley de Maxwell-Ampère en estado cuasiestático mostrada en la expresión (4.1), aplicada en una superficie abierta S_1 delimitada por una curva cerrada C_1 .

Entonces, teniendo en cuenta que el término derecho de la expresión (4.1) es la corriente total i que circula por la curva cerrada C_1 , dicha expresión puede escribirse como

$$\oint_{C_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = i. \quad (4.38)$$

Por otra parte, el flujo magnético Φ_m que atraviesa la esfera expresado en términos de la inducción magnética \mathbf{B}_1 que lo genera, y considerando que este fluye a través de una superficie abierta S_2 delimitada por una curva cerrada C_2 con unidad normal, se define como

$$\Phi_m = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} da. \quad (4.39)$$

Como este flujo es cambiante en el tiempo, se induce un campo eléctrico \mathbf{E}_2 alrededor de la esfera, circulando por una curva cerrada C_3 , cuya integral de línea define la fuerza electromotriz similar a la mostrada en la expresión (4.4). Dicha fuerza electromotriz generada, es proporcional a las variaciones temporales del flujo magnético Φ_m , definida por la ley de inducción de Faraday

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (4.40)$$

cuyo signo negativo está en correspondencia con la ley de Lenz, la cual establece que la fuerza electromotriz generada, y por consiguiente, la corriente que aparece por su causa, tendrán una dirección opuesta a la del flujo magnético cambiante en el circuito [39].

Luego, empleando la ley de Ohm como se muestra en [43] y en correspondencia con la expresión (4.6), se puede afirmar que la fuerza electromotriz ϵ cambiante en el tiempo produce un flujo de corriente i_2 con densidad \mathbf{J}_2 en la esfera, a la cual, se asocia un campo magnético \mathbf{H}_2 . Al igualar las expresiones (4.4) y (4.40) teniendo en cuenta la sustitución de la expresión (4.39) en la expresión (4.40), se obtiene la expresión que define la ley de Faraday

$$\oint_{C_3} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} da. \quad (4.41)$$

Como los sentidos de las corrientes i e i_2 son opuestos, los campos magnéticos asociados a cada una provocarán un efecto de repulsión en el circuito, descrito como el efecto de una fuerza actuando en la esfera como se observa en las expresiones (4.8) y (4.9). Esta fuerza debe oponerse al propio peso de la esfera para permitir finalmente que levite.

En la figura 4.18, se aprecia la distribución esquemática de los campos magnéticos en el sistema, mostrando sus respectivos sentidos en correspondencia con las corrientes.

Si la bobina fuese alimentada con corriente directa constante, no se induciría corriente en la esfera al no existir campos magnéticos cambiantes en el tiempo, por consiguiente, tampoco existiría interacción entre dichos campos magnéticos provocando que el fenómeno de levitación magnética no exista.

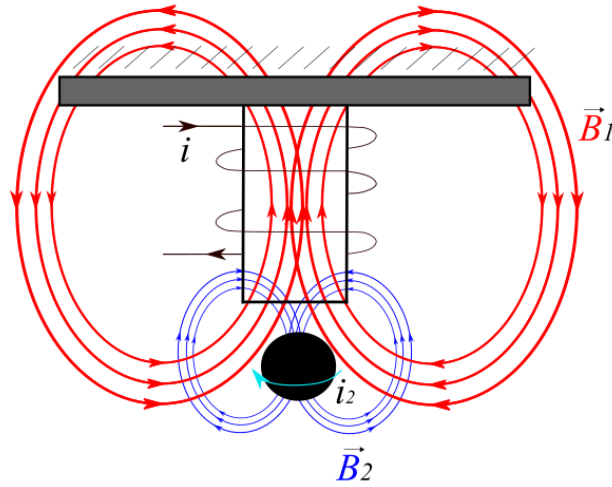


Figura 4.18: Comportamiento de los campos magnéticos en el sistema de la esfera con una bobina superior.

4.2.1. Construcción del Lagrangiano natural del sistema

Para realizar la construcción del Lagrangiano natural del sistema, de forma similar a como se estableció en el caso del anillo de Thomson, debemos tener en cuenta que la expresión que se obtenga tiene que ser similar a la expresión (2.1). A este Lagrangiano, no se le harán modificaciones geométricas ni modificaciones que alteren la dinámica propia del sistema, y por lo tanto, pueda ser llamado Lagrangiano natural. Comenzaremos con el reconocimiento de los grados de libertad que se van a considerar en el estudio, para luego definir las expresiones energéticas que conforman finalmente la expresión Lagrangiana.

Reconocimiento de los grados de libertad

Como ya mencionamos anteriormente, los grados de libertad que se tendrán en cuenta para el estudio del sistema, son definidos como el número mínimo de coordenadas generalizadas independientes necesarias para definir el estado cinemático de un mecanismo o sistema electromecánico. El número de grados de libertad coincide con el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento. En este caso, se establecen dos grados de libertad atendiendo a las siguientes consideraciones:

- **h.** Altura o posición de la esfera en el eje vertical.

Solo se considera la variación de la posición de la esfera en el eje vertical, excluyendo otro posible grado de libertad como podría ser la variación de la posición horizontal. La selección de este único grado de libertad con respecto a las posiciones simplifica el estudio; para los objetivos del mismo, enfocados en lograr el control del sistema mediante Lagrangianos controlados, sería suficiente. El par en coordenadas generalizadas de este grado de libertad se define como (h, \dot{h}) , siendo \dot{h} la velocidad de la esfera considerada más adelante como v .

- **q.** Carga eléctrica en la bobina.

Como pudimos apreciar en el caso del anillo de Thomson, seleccionar este grado de libertad y no la corriente i que circulará por la bobina, permitirá analizar al sistema

como de primer orden en dicha corriente, empleando el movimiento de cargas $i = -\dot{q}$, cuando realmente la corriente se estudiará de la forma $\dot{i} = -\ddot{q}$, siendo el sistema de segundo orden en la carga. Esto implica que (i, \dot{i}) , o (\dot{q}, \ddot{q}) , sea el par en coordenadas generalizadas para este grado de libertad, y por consiguiente, pueda emplearse en el sistema de primer orden.

Definición de funciones energéticas

La definición de funciones energéticas en el sistema, de acuerdo al carácter cinético o potencial en cada elemento, permite que la expresión Lagrangiana se adapte en mayor medida a la dinámica real que se desea estudiar. Para ello, nos enfocaremos en los siguientes elementos:

■ Bobina

Suponiendo que la posición de la bobina no varía a lo largo del núcleo ferromagnético, solo tendrá una componente energética

$$E_1 = \frac{1}{2} L_c(h) \dot{q}^2, \quad (4.42)$$

donde $L_c(h)$ es la inductancia en el sistema. Como se aprecia, $L_c(h)$ es una función de la altura que alcance la esfera. Insertamos esta función dentro del análisis energético en la bobina, por la razón de considerar la expresión

$$L(h) = L_1 + L_0 e^{-\frac{h}{a}}, \quad (4.43)$$

donde L_1 es la auto-inductancia de la bobina cuando se retira la bola, como podemos apreciar en la sección 2.5 junto con la definición de los demás parámetros. Justamente la expresión (4.43) además de ser la inductancia en el sistema, como ya se mencionaba, representa el acoplamiento energético que usaremos en la expresión Lagrangiana. Dicha expresión se puede definir como la energía cinética asociada al movimiento de cargas en la bobina (Consultar la sección 2.3); por lo tanto, consideraremos en este estudio $T_1 = E_1$, en relación a la notación empleada.

■ Esfera

Teniendo en cuenta que la esfera levitará a una altura determinada h , tendrá una componente de energía potencial

$$U = mgh, \quad (4.44)$$

donde m es la masa de la esfera y g , la constante de aceleración gravitatoria.

Además, como existirá movimiento de la esfera en el eje vertical, se debe considerar también la componente cinética

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{h}^2. \quad (4.45)$$

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se presenta el Lagrangiano natural del sistema

$$L = \frac{L_c(h) \dot{q}^2}{2} + \frac{m \dot{h}^2}{2} - mgh, \quad (4.46)$$

a partir del cual, se obtendrán las ecuaciones de movimiento del sistema derivando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

4.2.2. Obtención de las ecuaciones de movimiento

En este caso, las ecuaciones de movimiento también se obtendrán aplicando la expresión (2.4), conocida como la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas. Dicho esto, se definen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial L}{\partial h} = 0 \quad (4.47)$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (4.48)$$

en correspondencia con el número de grados de libertad considerados en el sistema; se resolverán dos ecuaciones.

Desarrollando la expresión (4.47):

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{d}{dh} \left(\frac{L_c(h)\dot{q}^2}{2} \right) - mg \quad (4.49)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = m\ddot{h}, \quad (4.50)$$

se obtiene la primera ecuación de movimiento (asociada a h), definida como

$$m\ddot{h} = \frac{d}{dh} \left(\frac{L_c(h)\dot{q}^2}{2} \right) - mg. \quad (4.51)$$

Finalmente, desarrollando la expresión (4.48):

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -L'_c \dot{q} \dot{h} - L_c(h)\ddot{q}, \quad (4.53)$$

donde $L'_c = \frac{dL_c(h)}{dh}$, se obtiene la segunda ecuación de movimiento (asociada a q), definida como

$$L_c(h)\ddot{q} = -L'_c \dot{q} \dot{h}. \quad (4.54)$$

Teniendo en cuenta las expresiones

$$\dot{q} = -\dot{h} \quad (4.55)$$

y

$$v = \dot{h}, \quad (4.56)$$

las expresiones (4.51) y (4.54) se escriben como

$$m\dot{v} = \frac{d}{dh} \left(-\frac{L_c(h)\dot{v}^2}{2} \right) - mg \quad (4.57)$$

y

$$L_c(h)\dot{v} = -L'_c \dot{v} v - R\dot{v} - U(t). \quad (4.58)$$

Como se aprecia, ya quedan escritas en términos de la corriente i y de la velocidad v , facilitando así los estudios posteriores. El término señalado en azul corresponde a la influencia de un término disipativo R que representa el efecto Joule en la bobina. En este sistema no se considera un coeficiente de fricción β en la expresión (4.57), por la razón que solo estaría dado por la influencia del aire y se puede despreciar fácilmente. Se recuerda nuevamente que estos términos disipativos no surgen naturalmente de las ecuaciones de movimiento obtenidas, pero si será necesaria su consideración en el estudio de la dinámica propia del sistema.

4.2.3. Simulaciones de la dinámica propia del sistema

Para llevar a cabo las simulaciones de la dinámica natural del sistema, se realizarán dos casos de estudio según el modelo dinámico del sistema, donde en cada uno se hará una variación de los parámetros circuitales seleccionados de manera arbitraria, es decir, aún no se considerarán valores reales obtenidos experimentalmente. Con estas simulaciones se puede observar la conservación de la energía según el Lagrangiano natural construido. Para el primer caso, no se considera la disipación y la fricción en el sistema; de hecho, considerar un coeficiente de fricción no tendría mucho sentido, ya que solo se tendría que tener en cuenta el coeficiente de fricción del aire que actúa en la esfera, el cual, es muy pequeño. En un segundo caso de estudio, si se considera una resistencia R , propia del conductor utilizado en la bobina; la disipación que ocurre en este elemento circuital, si afecta al balance energético en el sistema, y por consiguiente, se espera que la esfera caiga a medida que avance la simulación. En ambos casos, no se considerará fuente de alimentación, solo se considerará un valor inicial de corriente en la bobina; el empleo de fuente, como también se mencionaba en el estudio del anillo de Thomson, se considerará en el Capítulo 5, al modificarla para agregar el control según el Lagrangiano controlado obtenido.

Caso de estudio I

En este caso, como ya se mencionaba, no se tendrá en cuenta el término disipativo R , permitiendo representar la operación del sistema como caso ideal. Los parámetros que se consideran son: $L_1 = 0.349$ H, $L_0 = 0.229$ H, $L_p = 0.5$, $a = 6.66 \times 10^{-3}$, $g = 9.81$ m/s² y $m = 0.018$ kg, incluyendo condiciones iniciales $i(0) = 0.8486$ A, $h(0) = 0.04$ m y $v(0) = 0$. El tiempo empleado en las simulaciones será $t = 20$ s.

En la figura 4.19, se aprecia como la esfera levita a una altura oscilante con límite inferior constante definido por la condición inicial, el cual, en términos energéticos, se define como un punto de máxima energía potencial y mínima energía cinética, según las referencias consideradas. En este punto, la esfera está bajo la acción de una fuerza magnética mínima y comienza a caer. Luego se repite el ciclo evidenciándose la conservación de la energía en el sistema, especialmente, por no considerar elementos disipativos, de fricción u otras fuentes externas. En el punto de mínima energía potencial, la esfera con $v = 0$, vuelve a elevarse por la acción de una fuerza electromagnética máxima. Técnicamente el fenómeno electromagnético que ocurre en este caso de estudio, es similar al descrito en el Caso de estudio I correspondiente al análisis del anillo de Thomson.

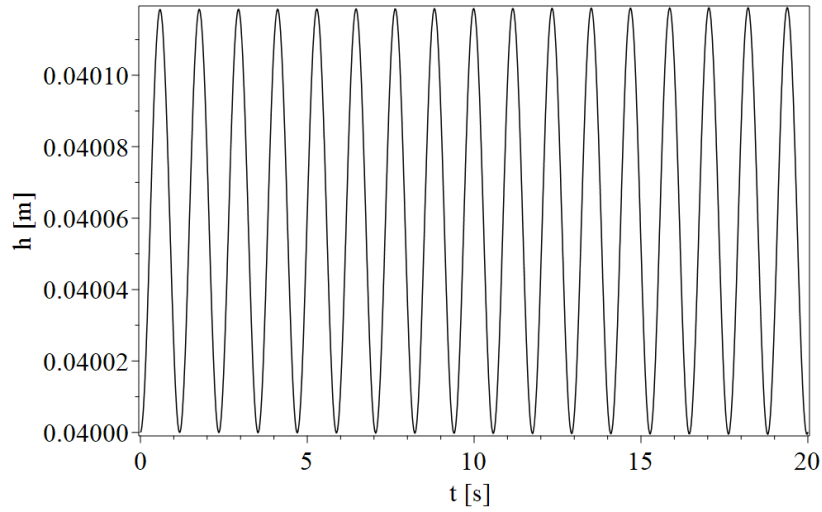


Figura 4.19: Comportamiento natural de la altura de la esfera.

En la figura 4.20, se muestra el comportamiento de la corriente por la bobina; como se aprecia, también tiene un comportamiento oscilatorio constante al no ser afectada por la disipación de una resistencia. Esta corriente va definiendo la fuerza magnética en el sistema en correspondencia con sus oscilaciones, por lo cual, desde el punto de vista electromagnético, la esfera compensa en cada una, a su propio peso para poder levitar por la razón que ya se explicaba.

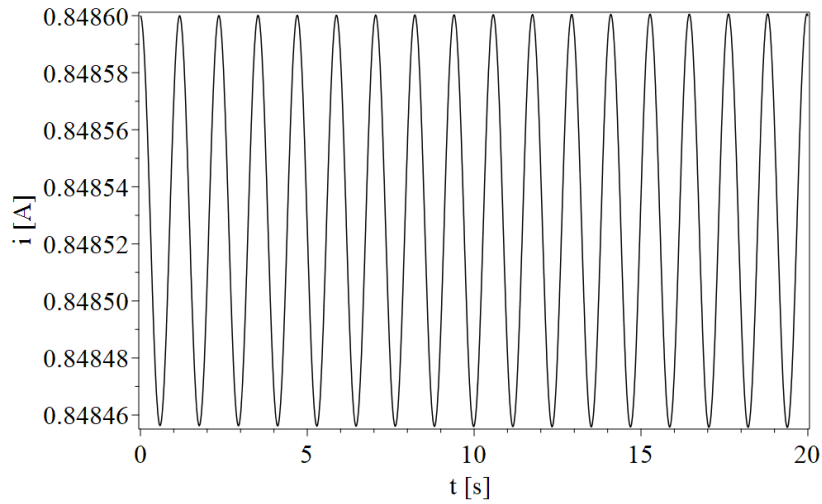


Figura 4.20: Comportamiento natural de la corriente por la bobina. Sistema de la esfera con una bobina superior.

Para observar el comportamiento de $h(t)$ *vs.* $v(t)$ se traza su correspondiente plano de fase, mostrado en la figura 4.21. Este plano de fase puede dar una idea de la estabilidad del sistema, aunque hasta el momento, no se hace ningún estudio en este sentido.

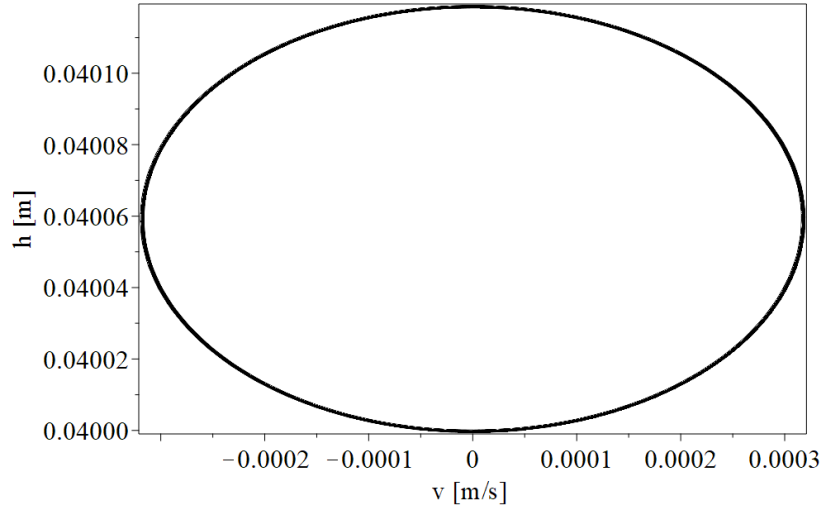


Figura 4.21: Plano de fase correspondiente a la dinámica natural de la esfera con una bobina superior.

Caso de estudio II

En este caso si se tendrá en cuenta el término disipativo $R = 0.1 \Omega$. Los parámetros que se consideran son: $L_1 = 0.349 \text{ H}$, $L_0 = 0.229 \text{ H}$, $L_p = 0.5$, $a = 6.66 \times 10^{-3}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y $m = 0.018 \text{ kg}$, incluyendo condiciones iniciales $i(0) = 0.8486 \text{ A}$, $h(0) = 0.04 \text{ m}$ y $v(0) = 0$. El tiempo empleado en las simulaciones será $t = 20 \text{ s}$.

En la figura 4.22, se aprecia como la esfera comienza a caer desde el comienzo de la simulación. Se podría haber observado un comportamiento oscilatorio al principio de la simulación, pero este está fuertemente ligado en la selección de parámetros circuitales y condiciones iniciales; preferimos continuar con los mismos parámetros considerados en el caso de estudio anterior y observar el comportamiento que esperábamos de la esfera, que cayera por la acción de la disipación en la bobina. Nuevamente se demuestra que el efecto de la resistencia en el circuito influye en la estabilidad del sistema.

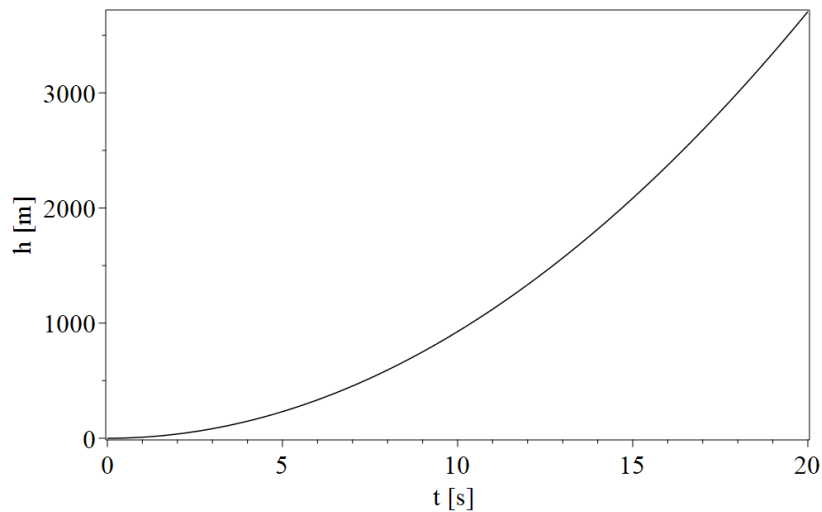


Figura 4.22: Comportamiento de la altura de la esfera considerando disipación en el circuito.

El comportamiento de la corriente i , según se aprecia en la figura 4.23, tiene una característica particular; cuando la esfera cae esta corriente decrece súbitamente, tiene una pequeña variación y luego permanece constante. Al no estar la esfera cerca de la bobina o al no tener una fuente activada, no puede existir variación en el sentido del campo magnético que en principio podría inducirse.

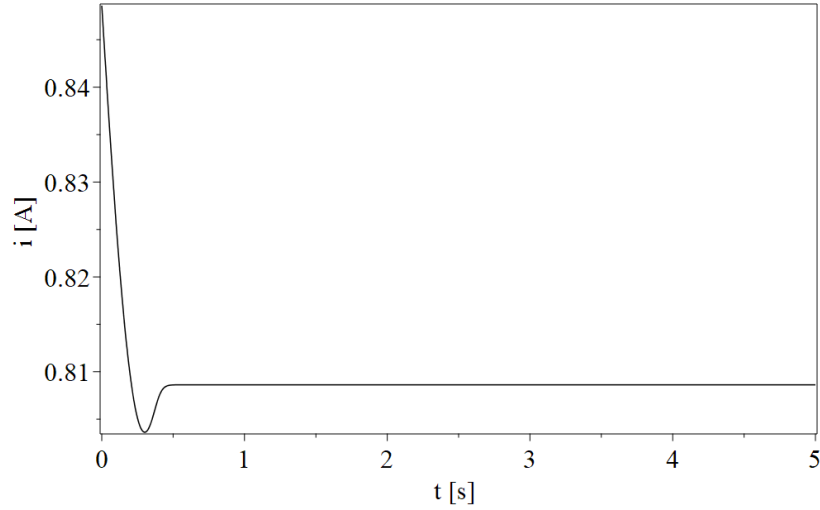


Figura 4.23: Comportamiento de la corriente por la bobina considerando disipación. Sistema de la esfera con una bobina superior.

En este caso de estudio también se traza el plano de fase correspondiente a $h(t)$ vs. $v(t)$ para analizar el comportamiento del sistema desde ese punto de vista. En la figura 4.24 se ve a simple vista como se inestabiliza el sistema bajo la acción de la disipación sin control.

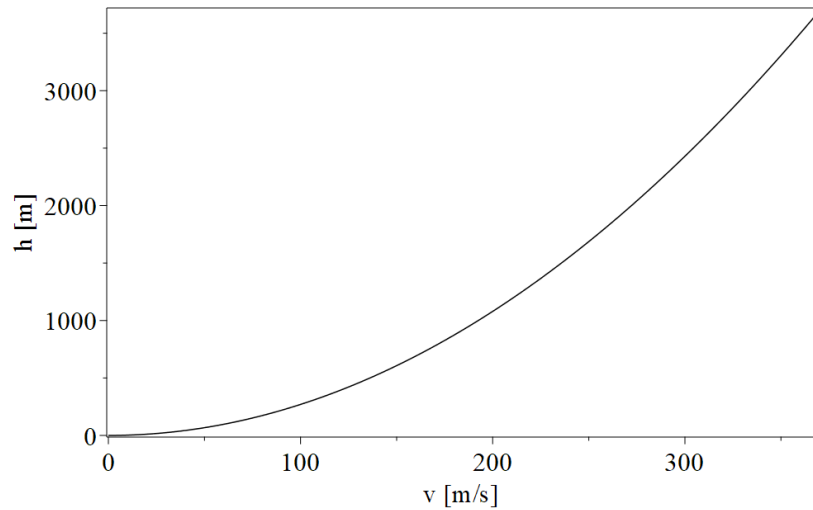


Figura 4.24: Plano de fase correspondiente a la dinámica de la esfera considerando disipación.

4.2.4. Análisis geométrico de estabilidad

De forma similar al estudio realizado en el sistema el anillo de Thomson, se parte del estudio teórico realizado en la sección 2.6 y de la consideración de los dos grados de libertad definidos en el sistema. Primero, se construye un tensor geométrico

$$G = L_c(h) dq \otimes dq + m dh \otimes dh, \quad (4.59)$$

con el cual, se define la métrica no singular definida positiva

$$\mu = \begin{bmatrix} L_c(h) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Para este estudio de estabilidad, consideramos la aproximación de $L_c(h)$ según se muestra en la expresión (4.43). Tampoco consideramos la disipación en el sistema, trabajando solo con las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas a partir de la expresión Lagrangiana natural conservativa en la expresión (4.46); con estas ecuaciones y a partir de la métrica de Jacobi, se obtiene un escalar de Ricci que define las curvaturas en el espacio de configuración del sistema, dado como una función de tres variables $f(i, h, v)$. Las singularidades de esta función seccionalizada, debido a su tamaño, se analizan empleando su denominador

$$f_D(i, h, v) = 2(-1 + h) (v^2(-1 + h) - i^2)^3. \quad (4.61)$$

Como se aprecia en la expresión (4.61), el término $(-1 + h)$ es una singularidad de la función para $h = 1$. Para realizar un estudio de h y v en los rangos $[0, 1.2]$ m y $[-0.1, 0.1]$ m/s respectivamente, se evalúa $i = 0.8486$ A. Este estudio permite visualizar en la figura 4.25 los signos del escalar de Ricci en tres dimensiones; dichos signos están representados en el eje z .

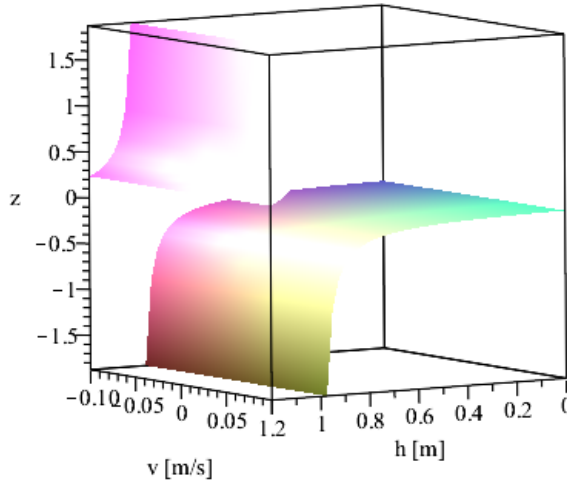


Figura 4.25: Sección de la curvatura de movimiento en el sistema de la esfera con una bobina superior.

Para el extremo derecho en el rango de h se considera una magnitud algo exagerada con respecto a las dimensiones tomadas anteriormente; esto se realiza para observar la singularidad en la sección de la curvatura de movimiento.

Como se aprecia, la curvatura tiene signos tanto positivos como negativos en z de acuerdo a los rangos de h y v , los cuales fueron establecidos de forma tal, que incluyeran posibles condiciones iniciales cercanas a $h(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Este comportamiento de la curvatura, según el estudio realizado en la sección 2.6, especialmente teniendo en cuenta la definición presentada por Yahalom *et al.* [47], supone que el sistema será inestable a partir de una vecindad cercana a la singularidad como se muestra en la figura 4.25. En este sentido, la selección de condiciones iniciales se hará teniendo en cuenta el tramo de curvatura positivo en función de una altura específica a la que se pretenda levite la esfera.

En aras de hacer una selección de condiciones iniciales que garanticen la estabilidad, teniendo en cuenta el rango de signos propiciado por el escalar de Ricci, se realiza un estudio de la densidad del escalar de Ricci en dos dimensiones, siendo h y v los ejes de un plano en la vecindad $z(0^+)$ como se muestra en la figura 4.26. Con este gráfico se facilita la visualización de las zonas donde se pueden elegir condiciones iniciales, las cuales al ser consideradas, no provocan la inestabilización del sistema en su correspondiente estado inicial.

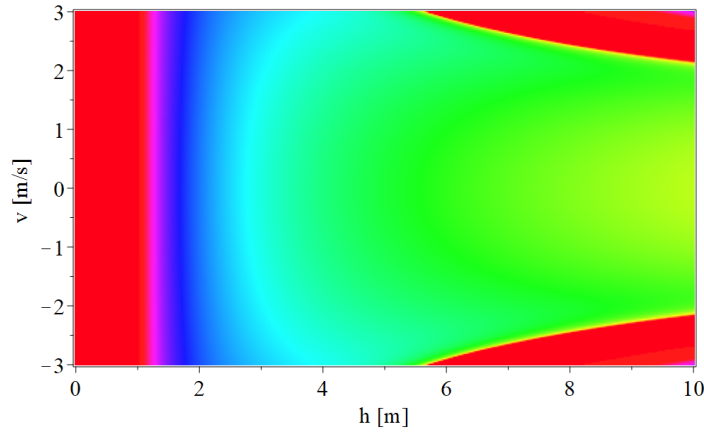


Figura 4.26: Densidad del escalar de Ricci en el sistema de la esfera con una bobina superior.

El área central representada por el color verde da una idea de la mejor zona para elegir condiciones iniciales, al contrario del área representada por el color rojo o por el color azul. Por ejemplo, suponiendo que la esfera es colocada en una posición inicial $h_0 = 0$ con velocidad inicial $v(0) = 0$, su movimiento podrá variar en un rango seguro de $[4, 8]$ m y $[-1, 1]$ m/s² para h y v respectivamente, de forma tal que no pierde la estabilidad.

Capítulo 5.

Lagrangianos controlados en sistemas de levitación magnética

En este capítulo se explica el procedimiento para el moldeado de energía cinética como establece Bloch *et al.* [3], tomando como objeto de estudio al sistema mecánico conformado por un péndulo invertido sobre un carro, presentado en el Capítulo 3 mediante un análisis y simulación de su dinámica propia; dentro de esta explicación se hace énfasis a detalle sobre la división en direcciones de simetrías y en la hipótesis central que se debe considerar en la obtención del Lagrangiano controlado, además, se presenta la energía cinética controlada del sistema, regida por una ley de control específica que garantiza la estabilidad del mismo. Finalmente, para este caso de estudio preliminar, se realiza el análisis del sistema dinámico controlado así como la simulación de la dinámica obtenida.

En el resto del capítulo, se presenta la aplicación de este procedimiento a los casos de estudio de sistemas de levitación magnética tratados en el trabajo. Para ellos no se enfatiza en algunos aspectos explicativos que se tratan en la primera sección, pero en cambio, si se explican paso a paso las consideraciones que se toman atendiendo a las características propias de estos sistemas. Finalmente, podemos observar como aspecto fundamental que la obtención de Lagrangianos controlados en sistemas particulares de levitación magnética es factible; conclusión que se respalda en este capítulo mediante la comparación de la dinámica natural del sistema sin control con la dinámica obtenida a partir del Lagrangiano controlado teniendo en cuenta las consideraciones de estabilidad.

5.1. Moldeado de energía cinética

Para explicar el procedimiento de moldeado de energía cinética, presentado de una forma muy resumida por Bloch *et al.* [3], se toma como objeto de estudio al sistema mecánico simple conformado por un péndulo invertido sobre un carro que se mueve en línea recta. El empleo de este sistema mostrado en la figura 3.10, permite definir una serie de pasos que serán aplicados a los sistemas particulares de levitación magnética que conforman el objeto de estudio principal del trabajo, con el objetivo de construir para ellos, su correspondiente Lagrangiano controlado, y a partir de el, establecer las consideraciones de estabilidad según sus características propias.

Considerando como grados de libertad en el caso más simple, al ángulo θ que determina la posición del péndulo y a x_M , que establece la posición horizontal del carro, se puede definir el espacio de posibles configuraciones del sistema

$$Q = S^1 \times \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

mediante un producto cartesiano de los dominios de ambos grados de libertad, los cuales se

definen como

$$\theta \in [0, 2\pi] \rightarrow S^1, \quad (5.2)$$

$$x_M \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Con las expresiones (5.2) y (5.3), se tiene una idea para representar el espacio de posibles configuraciones Q , el cual, debido a la dirección periódica descrita por θ (círculo S^1) y a la dirección infinita descrita por x_M , se puede representar topológicamente como un cilindro. En la figura 5.1 se aprecia la representación del espacio de posibles configuraciones Q , incluyendo una curva continua y diferenciable γ que define una posible trayectoria de movimiento del péndulo de un punto p_1 a un punto p_2 en el cilindro. Esta curva se define en cada punto, o estado del sistema, como $\gamma(t) \Rightarrow (\theta(t), x_M(t)) \forall t$, tomando el punto $r(\theta(t_0), x_M(t_0))$ como estado inicial del sistema.

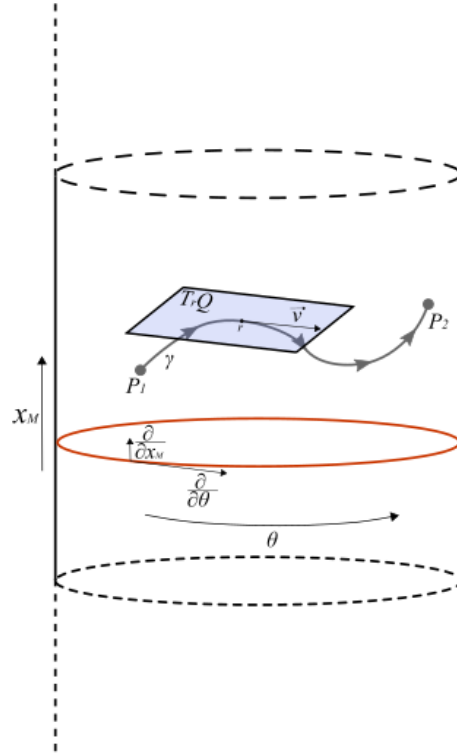


Figura 5.1: Representación del espacio de posibles configuraciones. Sistema del péndulo invertido en un carro.

El vector velocidad en Q definido por

$$v = \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{x}_M \frac{\partial}{\partial x_M}, \quad (5.4)$$

es tangente a γ en el punto r , además, forma parte del plano $T_r Q$ tangente al cilindro en $r \in Q$. Las componentes $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial x_M}$ son los vectores $\hat{e}_{(\theta)}$ y $\hat{e}_{(x_M)}$ en la dirección horizontal y vertical respectivamente.

Entonces, empleando la acción funcional establecida en la expresión (2.1) escrita en coordenadas generalizadas, y que siendo función del espacio de configuración con dependencia de

la posición y la velocidad, en este caso sería

$$L = L(\theta, x_M, \dot{\theta}, \dot{x}_M). \quad (5.5)$$

Construyendo un haz tangente (unión de todos los puntos) al espacio de configuración Q y definido por el espacio de estados TQ como se muestra en la figura 5.2, se puede hacer un mapeo $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ de la función Lagrangiana (5.5), desde un punto p con coordenadas de posición y velocidad $p(q, \dot{q}) = p(\theta, x_M, \dot{\theta}, \dot{x}_M)$, hasta un punto p' en Q con coordenadas de posición $p'(\theta, x_M)$. La dirección $\dot{\gamma}$ representa la velocidad del péndulo en el espacio de estados TQ .

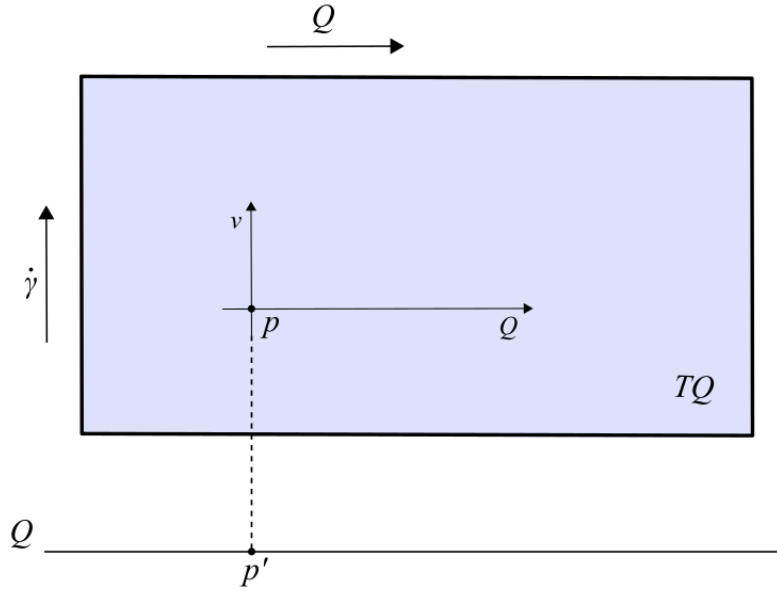


Figura 5.2: Representación del espacio de estados TQ .

Luego, se puede definir en coordenadas generalizadas el Lagrangiano natural del sistema según se establece en la expresión (2.2).

Por el momento, solo enfocaremos el estudio en la función de energía cinética T , la cual puede escribirse en este caso como

$$T = T_M + T_m, \quad (5.6)$$

donde

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 \quad (5.7)$$

y

$$T_m = \frac{1}{2} m v^2, \quad (5.8)$$

son las componentes cinéticas que corresponden al movimiento del carro y del péndulo respectivamente. En el caso de la expresión (5.8), la velocidad v tendrá dos componentes, las cuales se obtienen parametrizando la curva $\tilde{\gamma} : t \rightarrow [x_m(t), y_m(t)]$, en un espacio $Q \rightarrow \mathbb{R}^2$. Aquí,

$$x_m(t) = x_M(t) + l \sin \theta(t) \quad (5.9)$$

y

$$y_m(t) = l \cos \theta(t), \quad (5.10)$$

son las coordenadas de posición del péndulo.

Entonces, se puede definir la velocidad \mathbf{v} como una suma de componentes vectoriales

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{e}}_{(x)} + v_y \hat{\mathbf{e}}_{(y)}, \quad (5.11)$$

donde $v_x = \dot{x}_m(t)$ y $v_y = \dot{y}_m(t)$. De este modo, se calcula

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\dot{x}_M + l \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 + \left(-l \sin \theta \dot{\theta} \right)^2 \\ v^2 &= \dot{x}_M^2 + 2l \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_M + l^2 \dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Con este desarrollo, es posible definir la función de energía cinética $T = T(q, \dot{q})$ para este caso de estudio como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{x}_M^2 + 2l \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_M + l^2 \dot{\theta}^2 \right] \\ T &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}_M^2 + ml \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_M + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

la cual, puede escribir de forma matricial

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{x}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \cos \theta \\ c \cos \theta & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_M \end{pmatrix} \\ T &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{x}_M \end{pmatrix} \tilde{G} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_M \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde \tilde{G} es una matriz simétrica definida positiva con determinante distinto de cero y representa una estructura geométrica para el espacio de configuración, o simplemente, la métrica que brinda información de la energía cinética del sistema. Los parámetros que conforman esta métrica se definen como

$$a = ml^2, \quad b = c = ml, \quad d = (M + m),$$

y serán empleados para escribirla como producto tensorial

$$G = a d\theta \otimes d\theta + b \cos(\theta) d\theta \otimes dx_M + c \cos(\theta) dx_M \otimes d\theta + d dx_M \otimes dx_M. \quad (5.15)$$

5.1.1. División en direcciones de simetrías

El espacio de configuración Q se puede dividir en direcciones de simetrías tanto horizontales como verticales, identificadas en este caso por el parámetro b donde el ángulo θ no depende de x_M , y por lo tanto, en la dirección θ

$$\frac{\partial L}{\partial x_M} = 0. \quad (5.16)$$

Podemos decir que x_M es una dirección vertical que permite moverse en Q sin hacer cambios en el sistema.

Como G no es una métrica definida en un espacio *euclídeo*, no se puede afirmar que la dirección $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sea horizontal y perpendicular a la dirección vertical con dicha métrica; por lo

tanto, se debe calcular la dirección horizontal que cumpla esta condición de perpendicularidad. Para ello, se define

$$T = G(V, V) = G \left(\dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{x}_M \frac{\partial}{\partial x_M}, \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{x}_M \frac{\partial}{\partial x_M} \right), \quad (5.17)$$

donde $G(V, V)$ es un producto interior en Q que da información importante de la geometría, como por ejemplo, ortogonalidad, tamaño de la curva γ , etc. Con la expresión (5.17) se hará un mapeo multilinear, en el entendido que x_M es una dirección de simetría y por consiguiente, se puede definir $\frac{\partial}{\partial x_M}$ como la dirección vertical en cada punto; además, como la dirección horizontal debe ser ortogonal a la dirección vertical con la métrica G , se define un vector arbitrario \mathbf{W} de la forma

$$\mathbf{W} = W_x \frac{\partial}{\partial x_M} + W_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (5.18)$$

de modo que

$$G \left(\frac{\partial}{\partial x_M}, \mathbf{W} \right) = 0, \quad (5.19)$$

y se cumpla la condición de ortogonalidad teniendo un resultado nulo del producto punto.

Entonces, sustituyendo (5.18) en (5.19) y desarrollando la operación bilineal en la resultante, se obtiene

$$\begin{aligned} G \left(\frac{\partial}{\partial x_M}, W_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + W_x \frac{\partial}{\partial x_M} \right) &= 0 \\ G \left(\frac{\partial}{\partial x_M}, W_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + G \left(\frac{\partial}{\partial x_M}, W_x \frac{\partial}{\partial x_M} \right) &= 0 \\ W_\theta G \left(\frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + W_x G \left(\frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial x_M} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

aquí, se sustituyen los parámetros de G que están en correspondencia con (5.15), por lo tanto

$$W_\theta \left(\frac{1}{2} b \cos \theta \right) + W_x \left(\frac{1}{2} d \right) = 0. \quad (5.21)$$

Como W_θ es la dirección horizontal que cumple la condición de ortogonalidad, se despeja de (5.21) para obtener

$$W_\theta = -W_x \frac{d}{b \cos \theta}, \quad (5.22)$$

expresión que escrita como combinación lineal considerando \mathbf{W} se define

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= -W_x \frac{d}{b \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + W_x \frac{\partial}{\partial x_M} \\ \mathbf{W} &= W_x \left(-\frac{d}{b \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x_M} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Finalmente, como el término W_x no inside en la dirección horizontal, se definen

$$Hor = \left(-\frac{d}{b \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x_M} \right) \quad (5.24)$$

y

$$Ver = \left(\frac{\partial}{\partial x_M} \right), \quad (5.25)$$

como las direcciones del espacio de configuración Q . A modo de resumen, la dirección horizontal definida en la expresión (5.24), es la que permitirá modificar la métrica G respetando las direcciones de simetrías en el sistema, y por lo tanto, su obtención es el punto de partida en la obtención del Lagrangiano controlado.

5.1.2. Hipótesis para la obtención del Lagrangiano controlado

El primer punto necesario e hipótesis central en la obtención del Lagrangiano controlado del sistema, después de realizar el análisis de simetrías y direcciones, es que el espacio de configuración Q mostrado en la figura 5.1 sea un haz fibrado principal. Entiéndase como haz fibrado principal a $\xi : E \rightarrow B$ junto a una acción continua $E \times \Lambda \rightarrow P$ por un grupo topológico Λ , tal que Λ preserva las fibras de E y la acción es libre y transitiva; el fibrado principal puede definirse como una variedad diferenciable, de forma tal que $\xi : E \rightarrow B$ sea una aplicación diferenciable entre variedades, Λ un grupo de Lie y que la acción de Λ sobre E sea diferenciable.

En este caso, el haz fibrado Q está compuesto de dos espacios: la fibra, denotada por \mathbb{R} y la base, denotada por el círculo S^1 ; la fibra se considera como un grupo de Lie y la base es una variedad diferenciable. El producto cartesiano de estos espacios, al menos de manera local, es equivalente a Q como se muestra en la expresión (5.1), donde \mathbb{R} satisface las propiedades de grupo como conjunto y operación. Según la notación general empleada por Bloch *et al.* [3], el espacio de configuración puede definirse como

$$Q = S \times G, \quad (5.26)$$

donde S es el espacio de formas y G es la fibra o grupo de Lie (Consultar la sección 2.7). De la expresión (5.26) se puede deducir la factorización

$$S = Q/G, \quad (5.27)$$

que puede ser representada como se muestra en la figura 5.3, donde la trayectoria $\bar{\gamma}$ representa la evolución del sistema desde la forma P_1 con estado E_1 hasta la misma forma P_1 con estado E_2 pasando por la forma P_2 .

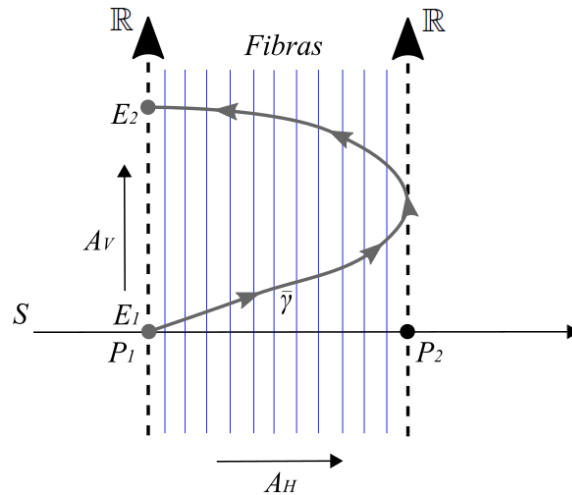


Figura 5.3: Espacio total del sistema o haz fibrado principal.

Esto quiere decir, que cuando se realizan acciones A_V y A_H en las direcciones vertical y horizontal respectivamente, el sistema evoluciona por el haz fibrado de tal forma que regresa al punto inicial, lo cual, desde el punto de vista matemático es equivalente a (5.27). Si por ejemplo, la acción vertical A_V es considerada como una rotación, el sistema mantiene la misma forma P_1 para un estado inicial E_1 y para un estado final (rotado con respecto a E_1) E_2 , lo que ahora a diferente altura.

Retomando nuestro caso de estudio del péndulo invertido sobre el carro, tenemos que el espacio de formas es S^1 , en el cual, el péndulo puede tener varias configuraciones de posición incluyendo la traslación del carro; por ejemplo, en un instante inicial para la posición del carro x_{M_0} , el péndulo experimenta una posición angular θ_0 , luego, el carro se traslada a x_{M_1} de forma tal que el péndulo mantiene el ángulo θ_0 , por lo tanto, puede asumirse que el sistema mantuvo la forma, pero obviamente se hizo una traslación. Entonces, el grupo de simetrías \mathbb{R} puede ser considerado en este caso como el grupo de traslaciones, equivalente al grupo de Lie teniendo en cuenta la suma de x_{M_0} a x_{M_1} .

Usando nuevamente la expresión (2.2), que para nuestro caso del péndulo invertido sobre un carro, y solo considerando la energía cinética en la expresión (5.13), se hace un cambio de notación en términos de una métrica tal que

$$T = \frac{1}{2} \mu(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (5.28)$$

donde μ es la masa generalizada, o bien la matriz de inercia; nótese el cambio de G por μ por la razón de emplear G como notación de grupo. Entonces, la energía cinética con el cambio de notación se define

$$T = \frac{1}{2} [a d\theta \otimes d\theta + b \cos \theta (d\theta \otimes dx_M + dx_M \otimes d\theta) + d dx_M \otimes dx_M] (\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (5.29)$$

donde el vector velocidad \mathbf{v} se definió en la expresión (5.4).

Luego, retomando la expresión (5.26) que define al haz fibrado principal, y que para nuestro caso es equivalente a la expresión (5.1), el espacio tangente TQ en cada punto mostrado en la figura 5.4 se escribe como

$$TQ = \mathfrak{D} \oplus Ver, \quad (5.30)$$

siendo una distribución \mathfrak{D} en suma directa [73], p. 19, con la dirección vertical Ver definida por las direcciones de simetrías en la expresión (5.25). Entiéndase por \mathfrak{D} , un espacio horizontal

$$\mathfrak{D} = \{\hat{H}\}; \quad \hat{H} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{b \cos \theta}{d} \frac{\partial}{\partial x_M}, \quad (5.31)$$

en correspondencia con la expresión (5.24) y definido con la métrica μ , de forma tal que

$$\mu(Ver, \mathfrak{D}) = 0. \quad (5.32)$$

En otras palabras, el espacio tangente TQ en cada punto $q \in Q$ puede dividirse en direcciones verticales y horizontales, pero estas últimas al no ser ortogonales a Ver se pueden representar como \mathfrak{D} , según se muestra en la figura 5.4 de forma tal que no sea vertical.

Dicho espacio podrá contener cualquier vector \mathbf{v} tangente al punto $q \in Q$ con componentes Ver y \mathfrak{D} , definido en la expresión (5.4), pero ahora, haciendo un cambio de base

$$\mathbf{v}_q = v^H \hat{H} + v^V \hat{V}, \quad \mathbf{v}_q \in T_q Q, \quad (5.33)$$

que también se corresponde con la notación empleada por Bloch *et al.* [3]

$$\mathbf{v}_q = \text{Hor}(\mathbf{v}) + \text{Ver}(\mathbf{v}). \quad (5.34)$$

Las componentes v^H y v^V de la expresión (5.33) pueden calcularse como

$$v^H = \frac{\mu(\mathbf{v}, \hat{H})}{\mu(\hat{H}, \hat{H})} \quad (5.35)$$

y

$$v^V = \frac{\mu(\mathbf{v}, \hat{V})}{\mu(\hat{V}, \hat{V})}, \quad (5.36)$$

aquí, se considera la métrica μ según el cambio de notación realizado, como se aprecia en la expresión (5.29); además, se emplean las definiciones de \hat{H} y \hat{V} mostradas en la expresión (5.31) y en la expresión (5.25) respectivamente, teniendo en cuenta que $\text{Ver} = \hat{V}$. El vector tangente \mathbf{v} se considera en su base coordenada.

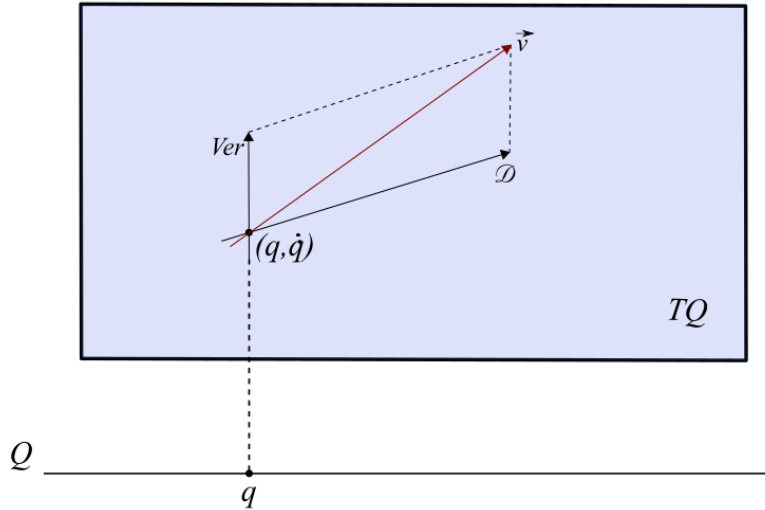


Figura 5.4: Descomposición del haz tangente TQ considerando la dirección horizontal \mathfrak{D} .

Entonces, calculando $\mu(\mathbf{v}, \hat{H})$ de la expresión (5.35), se tiene

$$\mu(\mathbf{v}, \hat{H}) = [a \, d\theta \otimes d\theta + b \cos \theta \, (d\theta \otimes dx_M + dx_M \otimes d\theta) + d \, dx_M \otimes dx_M](\mathbf{v}, \hat{H}), \quad (5.37)$$

expresado como producto tensorial de la métrica μ actuando en (\mathbf{v}, \hat{H}) . En este sentido, se va realizando el cálculo de cada término como se muestra a continuación.

Primer término

$$a \, (d\theta \otimes d\theta)(\mathbf{v}, \hat{H}) = a \, d\theta(\mathbf{v}) \, d\theta(\hat{H}) = a \, \dot{\theta}, \quad (5.38)$$

donde

$$d\theta(\mathbf{v}) = \dot{\theta} \, d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \dot{x}_M \, d\theta \left(\frac{\partial}{\partial x_M} \right) = \dot{\theta} \quad (5.39)$$

y

$$d\theta(\hat{H}) = d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{b \cos \theta}{d} \, d\theta \left(\frac{\partial}{\partial x_M} \right) = 1. \quad (5.40)$$

En ambos casos se realizó la operación lineal de abrir sumas y sacar escalares; este procedimiento se empleará en todos los términos. Se consideró $d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 1$ y $d\theta \left(\frac{\partial}{\partial x_M} \right) = 0$.

Segundo término

$$b \cos \theta \ (d\theta \otimes dx_M + dx_M \otimes d\theta) (\mathbf{v}, \hat{H}) = b \cos \theta \left(\dot{x}_M - \dot{\theta} \frac{b \cos \theta}{d} \right), \quad (5.41)$$

donde

$$(d\theta \otimes dx_M) (\mathbf{v}, \hat{H}) = d\theta(\mathbf{v}) \ dx_M(\hat{H}) = -\dot{\theta} \frac{b \cos \theta}{d} \quad (5.42)$$

y

$$(dx_M \otimes d\theta) (\mathbf{v}, \hat{H}) = dx_M(\mathbf{v}) \ d\theta(\hat{H}) = \dot{x}_M. \quad (5.43)$$

En la expresión (5.42) se empleó el resultado de la expresión (5.39), y en la expresión (5.43) se empleó el resultado de la expresión (5.40).

Tercer término

$$d \ (dx_M \otimes dx_M) (\mathbf{v}, \hat{H}) = -\dot{x}_M \frac{b \cos \theta}{d}, \quad (5.44)$$

donde se emplearon los resultados de la expresión (5.42) y de la expresión (5.43).

Sustituyendo las expresiones (5.38), (5.41) y (5.44) en la expresión (5.37), se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{v}, \hat{H}) &= a \dot{\theta} + b \cos \theta \left(\dot{x}_M - \dot{\theta} \frac{b \cos \theta}{d} \right) - \dot{x}_M \frac{b \cos \theta}{d}, \\ \mu(\mathbf{v}, \hat{H}) &= \frac{a \dot{\theta} \ (-m \cos^2 \theta + d)}{d}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Seguidamente, se calcula $\mu(\hat{H}, \hat{H})$ de la expresión (5.35), para ello se considera

$$\mu(\hat{H}, \hat{H}) = [a \ d\theta \otimes d\theta + b \cos \theta \ (d\theta \otimes dx_M + dx_M \otimes d\theta) + d \ dx_M \otimes dx_M] (\hat{H}, \hat{H}), \quad (5.46)$$

donde se aplicará el mismo procedimiento de solución empleado en la expresión (5.37).

Primer término

$$a \ (d\theta \otimes d\theta) (\hat{H}, \hat{H}) = a, \quad (5.47)$$

aplicando el resultado de la expresión (5.40).

Segundo término

$$b \cos \theta \ (d\theta \otimes dx_M + dx_M \otimes d\theta) (\hat{H}, \hat{H}) = b \cos \theta \left(\frac{2b \cos \theta}{d} \right), \quad (5.48)$$

aplicando los resultados de la expresión (5.40) y de la expresión (5.42).

Tercer término

$$d \ (dx_M \otimes dx_M) (\hat{H}, \hat{H}) = \left(\frac{b \cos \theta}{d} \right)^2, \quad (5.49)$$

aplicando el resultado de la expresión (5.42).

Sustituyendo las expresiones (5.47), (5.48) y (5.49) en la expresión (5.46), se obtiene

$$\begin{aligned}\mu(\hat{H}, \hat{H}) &= a + b \cos \theta \left(\frac{2b \cos \theta}{d} \right) + \left(\frac{b \cos \theta}{d} \right)^2 \\ \mu(\hat{H}, \hat{H}) &= \frac{a(-m \cos^2 \theta + d)}{d}.\end{aligned}\tag{5.50}$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (5.45) y (5.50) en la expresión (5.35), se obtiene la componente horizontal v^H en la dirección \hat{H}

$$v^H = \dot{\theta}.\tag{5.51}$$

El cálculo de la componente vertical v^V en la dirección \hat{V} se realiza aplicando el mismo procedimiento descrito para v^H . Entonces, calculando el numerador $\mu(\mathbf{v}, \hat{V})$ de la expresión (5.36), se obtiene

$$\mu(\mathbf{v}, \hat{V}) = b \cos \theta \dot{\theta} + \dot{x}_M d.\tag{5.52}$$

Luego, el denominador $\mu(\hat{V}, \hat{V})$ de la expresión (5.36) es

$$\mu(\hat{V}, \hat{V}) = d.\tag{5.53}$$

Sustituyendo las expresiones (5.52) y (5.53) en la expresión (5.36), se obtiene

$$v^V = \frac{b \cos \theta \dot{\theta} + \dot{x}_M d}{d}.\tag{5.54}$$

Como el espacio vectorial Ver genera todo el espacio tangente a la fibra, y por consiguiente, va en la dirección de esta, entonces, es equivalente al espacio tangente a q pero solamente de la fibra G de tal forma que

$$Ver = T_q G,\tag{5.55}$$

donde $T_q G$ es un espacio vectorial equivalente al espacio tangente a la identidad de grupo $T_i G$, y este a su vez, es isomorfo al álgebra de Lie del grupo definida por \mathfrak{g} . En resumen,

$$T_q G \simeq T_i G \simeq \mathfrak{g},\tag{5.56}$$

cumple con el Teorema fundamental de los grupos de Lie (Consultar la sección 2.7), cuya aplicación es necesaria para hacer las particiones verticales y horizontales como presentan Bloch *et al.* [3], y por lo tanto, poder continuar con la construcción del Lagrangiano controlado.

Entonces, si se considera τ como 1-forma diferencial

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{v}) &= \tau \left(\dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{x}_M \frac{\partial}{\partial x_M} \right) \\ \tau(\mathbf{v}) &= \dot{\theta} \tau \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \dot{x}_M \tau \left(\frac{\partial}{\partial x_M} \right),\end{aligned}\tag{5.57}$$

donde $\tau = \tau_\theta d\theta + \tau_{x_M} dx_M$ por ser un elemento del espacio Q ; $\tau_\theta = \tau_\theta(\theta, x_M)$ y $\tau_{x_M} = \tau_{x_M}(\theta, x_M)$ son funciones. Por lo tanto,

$$\tau(\mathbf{v}) = \dot{\theta} \tau_\theta + \dot{x}_M \tau_{x_M}, \quad \tau(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}.\tag{5.58}$$

Si se considera que τ en la expresión (5.58) actúa en un elemento vertical, $\tau(Ver) = 0$, entonces se puede definir la 1-forma horizontal real

$$\tau = \tau_\theta(\theta, x_M) d\theta, \quad (5.59)$$

pero si la 1-forma en la expresión (5.58) es evaluada en un álgebra de Lie \mathfrak{g} , y considerando que las dimensiones $\dim(\mathfrak{g}) = m$ y $\dim(Q) = n$, se define

$$\tau = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \tau_i^\alpha dx^i \otimes \hat{e}_{(\alpha)}, \quad (5.60)$$

donde el término $\tau_i^\alpha dx^i$ es el que actúa sobre vectores tangentes a \mathfrak{g} ; \hat{e}_α es la base de \mathfrak{g} .

En nuestro caso, el grupo de Lie $(G, \cdot) = (\mathbb{R}, +)$, y el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, cuya base $\{\hat{e}_{(1)}\} = \{\hat{1}\} \rightarrow \{\frac{\partial}{\partial x_M}\} = \{\hat{Ver}\}$ está escrita en términos del único vector $\frac{\partial}{\partial x_M}$ que apunta en la dirección que nos podemos mover, \hat{Ver} . Entonces, considerando la expresión (5.60), la evaluación de la 1-forma horizontal se define como

$$\tau = \tau_\theta^{\hat{1}}(\theta, x_M) d\theta \otimes \hat{1}. \quad (5.61)$$

Luego, si esta 1-forma horizontal en la expresión (5.61) actúa sobre un vector tangente \mathbf{v} en \hat{V} , puede reescribirse como

$$\tau(\mathbf{v}) = \tau_\theta^{\hat{1}} \mathbf{v}^H \hat{1}. \quad (5.62)$$

Ahora bien, si se considera $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow T_q Q$ que mapea de $\hat{1} \rightarrow \hat{V}$, notamos que la expresión (5.62) está en correspondencia con la definición establecida por Bloch *et al.* [3]

$$[\tau(\mathbf{v})]_Q = \Phi \left(\tau(\mathbf{v}) = \tau_\theta \mathbf{v}^H \hat{V} \right). \quad (5.63)$$

Finalmente, retomando las definiciones $Hor(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^H \hat{H}$ y $Ver(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^V \hat{V}$, pueden escribirse

$$Hor_\tau = \mathbf{v}^H \hat{H} - \tau_\theta \mathbf{v}^H \hat{V}, \quad (5.64)$$

y

$$Ver_\tau = \mathbf{v}^V \hat{V} + \tau_\theta \mathbf{v}^H \hat{V} = \hat{V} (\mathbf{v}^V + \tau_\theta \mathbf{v}^H), \quad (5.65)$$

las cuales, se corresponden nuevamente con las definiciones presentadas por Bloch *et al.* [3]

$$\mathbf{v}_q = Hor_\tau(\mathbf{v}) + Ver_\tau(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in T_q Q. \quad (5.66)$$

En este sentido, puede concluirse que

$$Hor(\mathbf{v}) \neq Hor_\tau(\mathbf{v}),$$

$$Ver(\mathbf{v}) \neq Ver_\tau(\mathbf{v}).$$

La consideración de estos aspectos es fundamental para proponer una τ de tal manera, que el Lagrangiano controlado obtenido en correspondencia con estas particiones cumpla con los requerimientos del problema de control.

5.1.3. Lagrangiano controlado del sistema

Empleando la 1-forma horizontal real definida en la expresión (5.59) después de haber sido evaluada en un álgebra de Lie, se define la función

$$k(\theta) = \tau_\theta(\theta, x_M). \quad (5.67)$$

De este modo, se puede reescribir la expresión (5.63) para obtener

$$\tau_Q = k(\theta)\dot{\theta}\hat{V}, \quad (5.68)$$

expresión que usaremos para determinar las acciones de la métrica

$$\mu(v, \tau_Q) = k(\theta)\dot{\theta} \left(d \dot{x}_M + b \cos(\theta)\dot{\theta} \right)$$

y

$$\mu(\tau_Q, \tau_Q) = d k(\theta)^2 \dot{\theta}^2. \quad (5.69)$$

Con estas herramientas ya se puede establecer el término T' que define al *control* dentro de la función de energía cinética en el Lagrangiano controlado

$$T' := \mu(v, \tau_Q) + \frac{1}{2}\mu(\tau_Q, \tau_Q) (\sigma + 1),$$

$$T' = \frac{d k(\theta)^2 \dot{\theta}^2}{2} (\sigma + 1) + d \dot{x}_M k(\theta) \dot{\theta} + b \cos(\theta) k(\theta) \dot{\theta}^2, \quad (5.70)$$

obtenido por las acciones de la métrica sobre nuevos vectores horizontales; en otras palabras, es una energía cinética modificada. La constante σ es un factor conforme que definiremos como $\sigma = -\frac{1}{\kappa}$, de igual forma a como establecen Bloch *et al.* [3]. Veremos más adelante que el ajuste de esta constante κ adimensional mediante la expresión estabilizadora, o ley de control, es equivalente a ajustar ganancias en las técnicas del control clásico.

Dicho esto, la energía cinética controlada se puede definir como

$$T_c = T_{nc} + T',$$

$$T_c = \frac{1}{2} \left(a \dot{\theta}^2 + d \dot{x}_M^2 + d \dot{\theta}^2 k(\theta)^2 (\sigma + 1) \right) + b \cos(\theta) \dot{\theta} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{x}_M \right) + d \dot{x}_M \dot{\theta} k(\theta), \quad (5.71)$$

donde el término T_{nc} corresponde a la energía cinética del Lagrangiano no controlado equivalente a la expresión (5.28).

Con la energía cinética controlada en la expresión (5.71), se define el Lagrangiano controlado del sistema

$$L_c = T_c - U,$$

$$L_c = \left[\frac{1}{2} \left(a \dot{\theta}^2 + d \dot{x}_M^2 + d \dot{\theta}^2 k(\theta)^2 (\sigma + 1) \right) + b \cos(\theta) \dot{\theta} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{x}_M \right) + d \dot{x}_M \dot{\theta} k(\theta) \right] + \delta \cos \theta, \quad (5.72)$$

donde $\delta = -mgl$. Se aclara que este Lagrangiano controlado solo incluye el moldeado de la energía cinética; como se observa, se emplea la misma energía potencial $U = \delta \cos \theta$ definida en el Lagrangiano natural o no controlado (Consultar la sección 3.3).

Finalmente, derivando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L_c}{\partial \theta} = 0 \quad (5.73)$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{x}_M} = 0, \quad (5.74)$$

se establecen las ecuaciones de movimiento controladas del sistema

$$\begin{aligned} k(\theta) (b \sin \theta v_\theta^2 + 2b \cos \theta \dot{v}_\theta - d \dot{v}_x) - v_\theta^2 k' (d k(\theta)(\sigma + 1) + b \cos \theta) \\ - \dot{v}_\theta k(\theta)^2 d (\sigma + 1) - b \cos \theta \dot{v}_x - a \dot{v}_\theta - \delta \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

y

$$b \sin v_\theta^2 - d (k(\theta) \dot{v}_\theta + \dot{v}_x) - d k' v_\theta^2 - b \cos \theta \dot{v}_\theta = 0, \quad (5.76)$$

en correspondencia con los grados de libertad θ y x_M respectivamente; además, teniendo en cuenta

$$v_\theta = \dot{\theta}$$

y

$$v_x = \dot{x}_M.$$

5.1.4. Establecimiento de la ley de control

Después de obtener las ecuaciones de movimiento controladas, se debe establecer la ley de control que rige el comportamiento estable del sistema; esta ley permite hacer una selección de parámetros de acuerdo al comportamiento que se desee tenga el sistema, de tal forma que tenga sentido la técnica de control mediante el Lagrangiano controlado.

Como establecen Bloch *et al.* [3], el primer paso es definir una ley de conservación en base a los momentos

$$p_{nc_{x_M}} = \frac{\partial L_{nc}}{\partial \dot{x}_M} = d \dot{x}_M + b \cos \theta \dot{\theta} \quad (5.77)$$

y

$$p_{c_{x_M}} = \frac{\partial L_c}{\partial \dot{x}_M} = b \cos \theta \dot{\theta} + d (\dot{x}_M + k(\theta) \dot{\theta}), \quad (5.78)$$

correspondientes al Lagrangiano no controlado y al Lagrangiano controlado respectivamente; nótese que los momentos se definen en base a la ecuación por la cual se implementará el control. En el caso de este sistema el control se aplicará al carro mediante una fuerza de control definida como

$$\begin{aligned} u &= \frac{d}{dt} (p_{nc_{x_M}} - p_{c_{x_M}}), \\ u &= -\frac{d}{dt} (d k(\theta) \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Esta fuerza de control es la que definirá la ley de control no lineal deseada, la cual, se agregará posteriormente a la ecuación de movimiento no controlada de x_M y conformar un nuevo sistema con el control dejando intacta a la ecuación no controlada de θ . Como se aprecia en la expresión (5.79) es preciso hallar la función $k(\theta)$; este paso es definitivamente no trivial, por el hecho de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales que no siempre tendrá las mismas características dependiendo del sistema. El método de solución que proponen Bloch *et al.* [3], es hacer una comparación de los coeficientes de $\ddot{\theta}$ y de $\dot{\theta}^2$ en ambas ecuaciones de θ , controlada y no controlada. Este método garantiza además, el emparejamiento que se debe realizar en ambos sistemas de ecuaciones para que el sistema se comporte con la misma dinámica natural después de establecer el control.

Entonces, despejando \ddot{x}_M en la expresión (5.76) y sustituyéndola en la expresión (5.75) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(-\sigma dk(\theta)^2 + \frac{b^2}{d} \cos^2 \theta + a \right) \ddot{\theta} \\ & + \left(-\sigma dk'(\theta)k(\theta) - \frac{b^2}{d} \cos \theta \sin \theta \right) \dot{\theta}^2 \\ & - \delta \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Luego, el emparejamiento consiste en resolver el sistema no controlado descrito en (3.12) sustituyendo la \ddot{x}_M calculada, para obtener

$$\begin{aligned} & \left(-a + b \cos \theta k(\theta) + \frac{b^2}{d} \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} \\ & + \left(b \cos \theta k'(\theta) - \frac{b^2}{d} \cos \theta \sin \theta \right) \dot{\theta}^2 \\ & - \delta \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Haciendo una comparación de los coeficientes correspondientes en las expresiones (5.80) y (5.81) se puede obtener, de forma doble

$$\begin{aligned} k(\theta) &= -\frac{b \cos \theta}{\sigma d}, \\ k(\theta) &= \frac{b \cos \theta \kappa}{d}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

la función que rige la 1-forma horizontal. Nótese que se ha sustituido κ como se planteaba anteriormente.

Seguidamente se despeja $\ddot{\theta}$ en la expresión (5.75) para sustituirla junto con la expresión (5.82) en la expresión (5.79); de este modo, se obtiene finalmente la ley de control no lineal deseada

$$u = -\frac{b \sin \theta \kappa d \left(a \dot{\theta}^2 + \delta \cos \theta \right)}{b^2 (\kappa + 1) \cos^2 \theta - ad}. \quad (5.83)$$

Finalmente, se establece el sistema controlado

$$\begin{bmatrix} E_\theta \\ E_{x_M} + u \end{bmatrix} = 0, \quad (5.84)$$

$$-\delta \sin \theta - a \ddot{\theta} - b \cos \theta \ddot{x}_M = 0,$$

$$b \sin \theta \dot{\theta}^2 - b \cos \theta \ddot{\theta} - a \ddot{x}_M + \left(-\frac{b \sin \theta \kappa d \left(a \dot{\theta}^2 + \delta \cos \theta \right)}{b^2 (\kappa + 1) \cos^2 \theta - ad} \right) = 0, \quad (5.85)$$

para el cual se define la condición de estabilidad

$$\kappa > \left(\frac{ad - b^2}{b^2} \right) = \frac{M}{m} > 0, \quad (5.86)$$

obtenida mediante un análisis en denominador de u , especialmente enfocado en las singularidades que anulan dicho control, en la asignación de parámetros que garantizan la definición de

la métrica y en las consideraciones de operación del sistema; por ejemplo, una consideración que se hace es tomar $\theta = \dot{\theta} = 0$ como punto de operación, el cual por naturaleza es un punto de equilibrio inestable del sistema y se pretende controlar con esta técnica transformándolo en un punto de equilibrio estable. La expresión (5.86) garantiza que el sistema opere en $\theta = \dot{\theta} = \dot{x}_M = 0$ haciendo una correcta selección de masas y una selección de la ganancia κ independientemente de la condición inicial que se establezca.

5.1.5. Simulación de la dinámica controlada

La simulación de la dinámica controlada se realiza partir del sistema descrito en (5.85), considerando los parámetros: $m = 0.5$ kg y $M = 1$ kg, que garantizan la condición de estabilidad según la expresión (5.86), $l = 0.5$ m, $g = 9.81$ m/s², y como condiciones iniciales $\theta(0) = -\frac{\pi}{4}$, $x_M(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{x}_M(0) = 1.365$ m/s². Aunque la inclusión de elementos disipativos en el sistema controlado, según presentan Bloch *et al.* [3], no es de manera trivial o tradicional, se colocaron los coeficientes $\beta_1 = 0.1$ y $\beta_1 = 0.02$, que representan la fricción del rodamiento que une a la barra del péndulo con el carro y a la fricción del carro con la superficie, respectivamente. La ganancia seleccionada y que garantiza la operación del sistema en $\theta = \dot{\theta} = \dot{x}_M = 0$, es $\kappa = 10$. Se realiza la simulación con un tiempo $t = 5$ s.

En la figura 5.5 se aprecia la posición angular controlada del péndulo. Nótese que se logra la condición de operación $\theta = 0$ en un tiempo relativamente rápido.

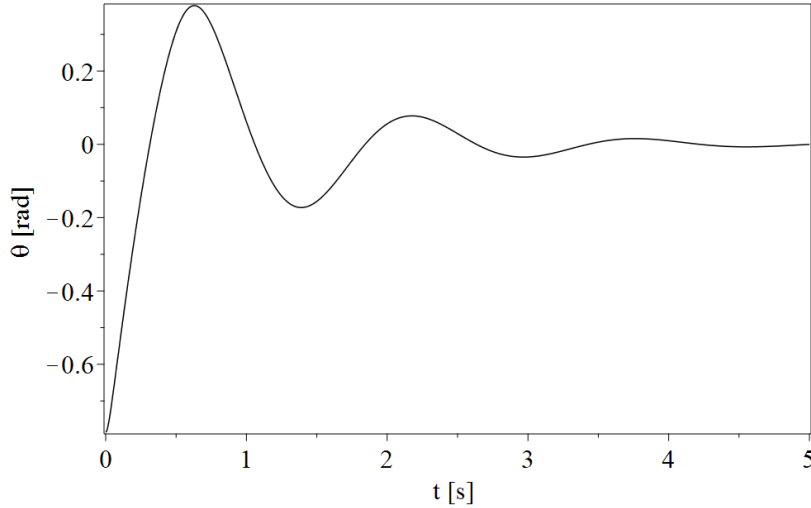


Figura 5.5: Posición angular controlada del péndulo invertido.

La posición de carro, aunque no es la variable controlada, también logra permanecer constante después de quedar estabilizado el péndulo en $\theta = 0$. En la figura 5.6 se aprecia como evoluciona a un valor constante dicha posición x_M .

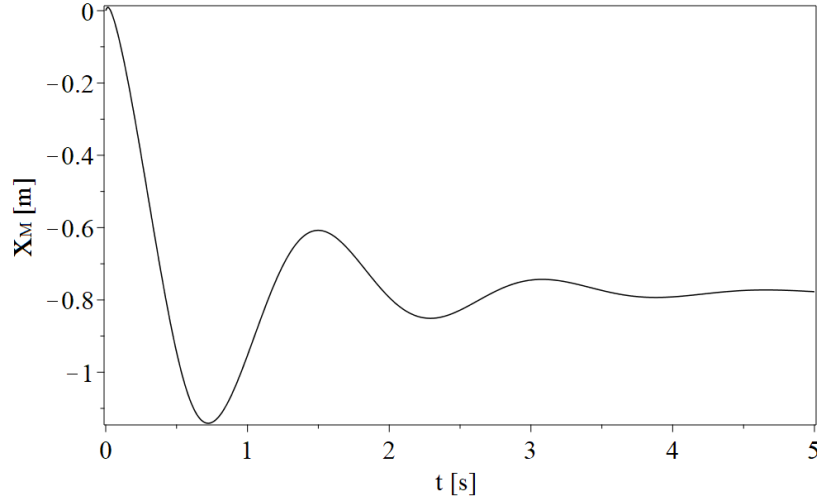


Figura 5.6: Evolución de la posición del carro.

Para comprobar el comportamiento del sistema controlado según el plano de fase, correspondiente a θ vs. $\dot{\theta}$ y a x_M vs. \dot{x}_M , se presentan las figuras 5.7 y 5.8 respectivamente. Como se muestra, ambos componentes del sistema evolucionan para tener un punto de equilibrio estable en $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $x_M = -0.8$, $\dot{x}_M = 0$ respectivamente. Decir que serán puntos de equilibrio estables se traduce en que sin importar la condición inicial en el sistema, el comportamiento del mismo hará llevar al péndulo al punto de operación deseado. Para este estudio el punto de equilibrio que ahora será estable coincide con el punto de operación deseado $\theta = 0$.

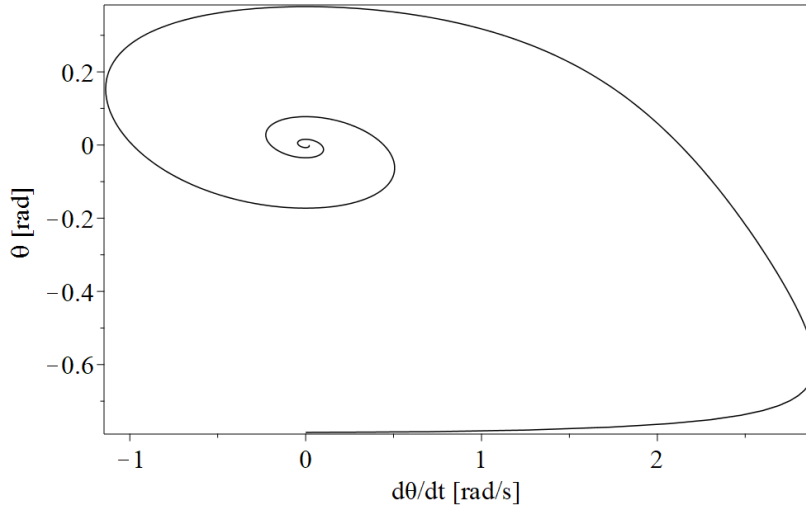


Figura 5.7: Plano de fase correspondiente al péndulo invertido controlado.

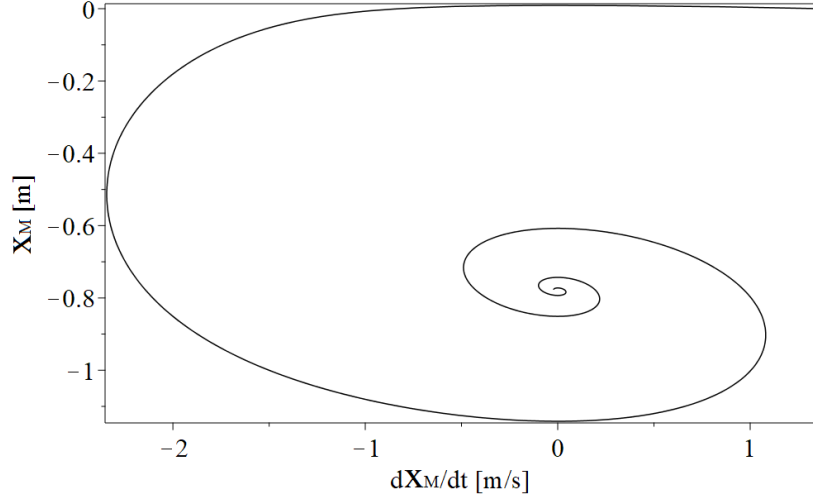


Figura 5.8: Plano de fase correspondiente al carro que conduce al péndulo invertido controlado.

Con este análisis se concluye la primera sección del capítulo, enfocada como ya se mencionó, en comprender la metodología propuesta por Bloch *et al.* [3], y aplicarla posteriormente a los sistemas de levitación magnética que estudiamos en el trabajo.

5.2. Anillo de Thomson

En esta sección se aborda el problema de control tomando como objeto de estudio el sistema del anillo de Thomson. Se asumió erróneamente la factorización del espacio de configuración de acuerdo al objetivo de control, pero está corregida en la sección 5.2.4 donde se demuestra la veracidad de los resultados.

Tomando como grados de libertad a q_1 , q_2 y h , que definen la carga eléctrica en la bobina, la carga eléctrica en el anillo y la altura del anillo respectivamente, según se establecieron en el capítulo 4, se define el espacio de posibles configuraciones del sistema

$$Q = [h_{min}, h_{max}] \times \mathbb{R}^2, \quad (5.87)$$

mediante un producto cartesiano entre el espacio de formas dado por el intervalo $[h_{min}, h_{max}]$ y el grupo de simetrías dado por \mathbb{R}^2 ; en este caso $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$. En la figura 5.9 se aprecia una representación del espacio de posibles configuraciones del sistema, se observan las direcciones infinitas que puede tomar q_1 y las direcciones finitas que puede tomar h , además, se incluye una curva continua y diferenciable γ que define una posible trayectoria de movimiento del anillo de un punto p_1 a un punto p_2 . Esta curva se define en cada punto, o estado del sistema, como $\gamma(t) \Rightarrow (h(t), q_1(t)) \forall t$, tomando el punto $r(h(t_0), q_1(t_0))$ como estado inicial del sistema. El vector velocidad en Q definido por

$$v = \dot{h} \frac{\partial}{\partial h} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad (5.88)$$

es tangente a γ en el punto $r \in Q$ dentro del plano $T_r Q$. Las componentes $\frac{\partial}{\partial h}$ y $\frac{\partial}{\partial q_1}$ son los vectores $\hat{e}_{(h)}$ y $\hat{e}_{(q_1)}$ en la dirección horizontal y vertical respectivamente; nótese que este detalle se puede representar como en el caso explicativo del péndulo invertido sobre el carro.

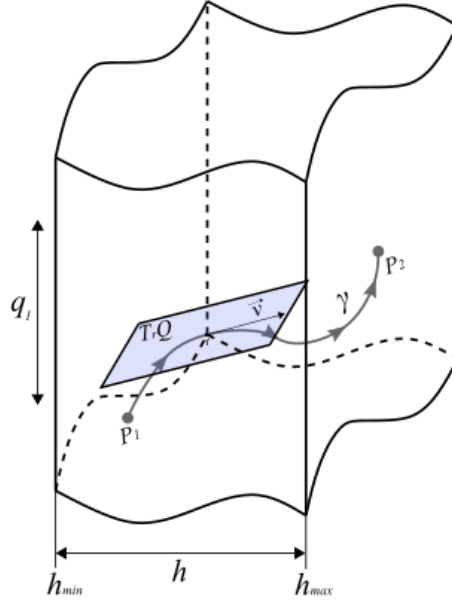


Figura 5.9: Representación del espacio de posibles configuraciones del sistema. Anillo de Thomson.

En este sentido, también serviría emplear la figura 5.2, que define el mapeo de la función Lagrangiana en la construcción de un haz tangente donde $\dot{\gamma}$ sería en este caso la velocidad del anillo en el espacio de estados TQ .

Solo se enfocará el estudio en la función de energía cinética T , la cual puede escribirse en este caso como

$$T = T_h + T_{q_1} + T_{q_2} + T_{q_{12}}, \quad (5.89)$$

donde

$$T_h = \frac{1}{2} m \dot{h}^2, \quad (5.90)$$

$$T_{q_1} = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2, \quad (5.91)$$

$$T_{q_2} = \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2 \quad (5.92)$$

y

$$T_{q_{12}} = L_{12}(h) \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (5.93)$$

son las componentes cinéticas que corresponden a cada elemento del sistema (bobina y anillo) considerando también el acoplamiento. Al contrario del ejemplo explicativo del péndulo invertido sobre el carro, en la expresión (5.90), \dot{h} solo tendrá una componente dada por el movimiento vertical del anillo, por lo tanto, no es necesario realizar una parametrización de la curva γ para sacar las componentes o coordenadas de la posición del anillo.

La función de energía cinética en la expresión (5.89), puede ser expresada de forma matricial como

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{h} & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & L_{12}(h) \\ 0 & L_{12}(h) & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \dot{h} & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{pmatrix} \tilde{G} \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.94)$$

donde \tilde{G} es una matriz simétrica definida positiva con determinante distinto de cero [$m(L_1 L_2 - L_{12}(h)^2) > 0$], en otras palabras, la métrica que brinda información de la energía cinética del sistema. Esta matriz representa una estructura geométrica para el espacio de configuración Q y puede ser escrita como producto tensorial en correspondencia con la expresión (4.34).

Empleando la métrica G definida en la expresión (4.34), el espacio de configuración Q se puede dividir en direcciones de simetrías, tanto horizontales como verticales. En este caso, en el parámetro $L_{12}(h)$ de la expresión (5.94), la altura h del anillo no depende de q_1 ni de q_2 , siendo estas las simetrías del sistema, las cuales en la dirección h empleando el Lagrangiano natural L

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad (5.95)$$

y por consiguiente, q_1 una dirección vertical que permite moverse en TQ sin hacer cambios en el sistema; como se comentó anteriormente, a pesar que q_2 también es una dirección vertical, no se tendrá en cuenta por el hecho que no tiene sentido colocar una fuente en el anillo. De las dos simetrías, solo tiene fines prácticos considerar q_1 en el esquema de control. Teniendo en cuenta esta consideración, se define

$$Ver = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \right), \quad (5.96)$$

como la única dirección vertical en el espacio de estados TQ . En este caso, la dirección horizontal también permitirá modificar la métrica G respetando la expresión (5.96).

5.2.1. Lagrangiano controlado del sistema

Como bien se explicó en la sección 5.1.2, la hipótesis central en la obtención del Lagrangiano controlado del sistema, después de realizar el análisis de simetrías y direcciones, es que el espacio de configuración Q mostrado en la figura 5.9 sea un haz fibrado principal. En el caso del anillo de Thomson, el haz fibrado Q también está compuesto de dos espacios: la fibra denotada por \mathbb{R}^2 y la base denotada por el intervalo $[h_{min}, h_{max}]$, como se aprecia en la expresión (5.87).

Si se considera a G como la fibra haciendo un cambio de notación, esta se define como un grupo de Lie y la base como una variedad diferenciable. El producto cartesiano de estos espacios, al menos de manera local, es equivalente a Q ; entonces, G satisface las propiedades de grupo como conjunto y operación como se aprecia en la factorización (5.27), la cual puede ser representada como se muestra en la figura 5.3 correspondiente al ejemplo explicativo. Entonces, el grupo de simetrías \mathbb{R} (correspondiente a q_1) puede ser considerado en este caso como el grupo de traslaciones.

Ahora, empleando la energía cinética definida en la expresión (4.34), se hace un cambio de notación en términos de una métrica μ tal que

$$T = \frac{1}{2} \mu(v, v), \quad (5.97)$$

siendo μ la matriz de inercia; nótese el cambio de G por μ por la razón de emplear G como

notación de grupo. Entonces, la energía cinética con el cambio de notación se define

$$T = \frac{1}{2} [L_1 dq_1 \otimes dq_1 + L_2 dq_2 \otimes dq_2 + L_{12}(h) (dq_1 \otimes dq_2 + dq_2 \otimes dq_1) + m dh \otimes dh] (\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (5.98)$$

donde el vector velocidad \mathbf{v} se corresponde con la expresión (5.88).

Por otra parte, y aplicable también a este caso, el espacio tangente TQ en cada punto mostrado en la figura 5.4 puede escribirse como

$$TQ = \mathfrak{D} \oplus Ver, \quad (5.99)$$

donde \mathfrak{D} es una distribución en suma directa con la dirección vertical Ver definida en la expresión (5.96), definida de tal forma que

$$\mu(Ver, \mathfrak{D}) = 0. \quad (5.100)$$

Realizando los productos tensoriales correspondientes como se explican paso a paso en la sección 5.1.2, se obtienen las componentes

$$v^H = \dot{h} \quad (5.101)$$

y

$$v^V = \frac{L_1 \dot{q}_1 + L'_1 h \dot{q}_2 + L_{120} \dot{q}_2}{L_1}, \quad (5.102)$$

en la dirección horizontal \hat{H} y vertical \hat{V} respectivamente.

También en este caso, el espacio vectorial Ver genera todo el espacio tangente a la fibra en su misma dirección, por lo tanto es equivalente al espacio tangente a q (ver figura 5.4) pero solamente de la fibra G de tal forma que se corresponde con la expresión (5.55). De igual manera, también se puede emplear la expresión (5.56), que define la equivalencia con el Teorema fundamental de los grupos de Lie.

Tomando nuevamente a τ como 1-forma diferencial definida en este caso como

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{v}) &= \tau \left(\dot{h} \frac{\partial}{\partial h} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \right), \\ \tau(\mathbf{v}) &= \dot{h} \tau \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) + \dot{q}_1 \tau \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \right), \end{aligned} \quad (5.103)$$

donde $\tau = \tau_h \dot{h} + \tau_{q_1} \dot{q}_1$ por ser un elemento del espacio Q ; $\tau_h = \tau_h(h, q_1)$ y $\tau_{q_1} = \tau_{q_1}(h, q_1)$ son funciones. Por lo tanto,

$$\tau(\mathbf{v}) = \dot{h} \tau_h + \dot{q}_1 \tau_{q_1}, \quad \tau(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}. \quad (5.104)$$

Si τ en la expresión (5.104) actúa en un elemento vertical, con la condición $\tau(Ver) = 0$, entonces se puede definir la 1-forma horizontal real

$$\tau = \tau_h(h, q_1) \dot{h}. \quad (5.105)$$

Además, la 1-forma en la expresión (5.104) es evaluada en un álgebra de Lie \mathfrak{g} , y considerando la equivalencia en las dimensiones de \mathfrak{g} y Q , se puede emplear la expresión (5.60) para evaluar dicha 1-forma con la base correspondiente en el álgebra de Lie, garantizando que al actuar sobre un vector tangente \mathbf{v} en \hat{V} , pueda definirse como la expresión (5.62).

Entonces, empleando la 1-forma horizontal real definida en la expresión (5.105) después de haber sido evaluada en un álgebra de Lie, se define la función

$$k(h) = \tau_h(h, q_1), \quad (5.106)$$

de modo que con ella, se puede reescribir la expresión (5.63) en la sección 5.1.2 para obtener en este caso

$$\tau_Q = k(h)\dot{h}\hat{V}, \quad (5.107)$$

expresión que usaremos para determinar las acciones de la métrica

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{v}, \tau_Q) &= k(h) \dot{h} \left(L_1 \dot{q}_1 + L' h \dot{q}_2 + L_{12_0} \dot{q}_2 \right), \\ \mu(\tau_Q, \tau_Q) &= L_1 k(h)^2 \dot{h}^2. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Hasta este punto, ya se puede definir la componente T' que define el control dentro de la función de energía cinética en el Lagrangiano controlado

$$\begin{aligned} T' &:= \mu(\mathbf{v}, \tau_Q) + \frac{1}{2} \mu(\tau_Q, \tau_Q) \sigma, \\ T' &= \frac{\sigma L_1 k(h)^2 \dot{h}^2}{2} + L_1 \dot{q}_1 k(h) \dot{h} + L_p k(h) h \dot{h} \dot{q}_2 + k(h) L_{12_0} \dot{h} \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (5.109)$$

La definición de este término se especifica con más claridad mediante el ejemplo explicativo usando el sistema del péndulo invertido en el carro. También emplearemos la constante adimensional σ siguiendo el mismo procedimiento establecido por Bloch *et al.* [3]. Entonces, con la componente de control se formula la energía cinética controlada

$$\begin{aligned} T_c &= T_{nc} + T', \\ T_c &= \frac{1}{2} \left(L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 + 2L_{12}(h) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m \dot{h}^2 + \sigma L_1 k(h)^2 \dot{h}^2 \right) \\ &\quad + k(h) \dot{h} (L_1 \dot{q}_1 + L_p h \dot{q}_2 + L_{12_0} \dot{q}_2), \end{aligned} \quad (5.110)$$

donde el término T_{nc} corresponde a la energía cinética del Lagrangiano no controlado equivalente a la expresión (5.97).

Con la definición de T_c , se puede establecer finalmente el Lagrangiano controlado del sistema

$$\begin{aligned} L_c &= T_c - U, \\ L_c &= \left[\frac{1}{2} \left(L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 + 2L_{12}(h) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m \dot{h}^2 + \sigma L_1 k(h)^2 \dot{h}^2 \right) + k(h) \dot{h} (L_1 \dot{q}_1 + L_p h \dot{q}_2 + L_{12_0} \dot{q}_2) \right] \\ &\quad - mgh. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Nuevamente se aclara que este Lagrangiano controlado solo incluye el moldeado de la energía cinética; se emplea la misma energía potencial $U = mgh$ definida en el Lagrangiano natural obtenido en la sección 4.1.

Luego, se procede a derivar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial L_c}{\partial h} = 0, \quad (5.112)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad (5.113)$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}_2} = 0, \quad (5.114)$$

mediante las cuales, se establecen las ecuaciones de movimiento controladas del sistema

$$L'_{12}\dot{i}_2 v - L_1 k' v^2 + L_{12}(h)\dot{i}_2 - L_1 (\dot{v}k(h) + \dot{i}_1) = 0, \quad (5.115)$$

$$k(h) [-L_p v^2 - \dot{v} (L_p h + L_{120})] + L_2 \dot{i}_2 + L_{12}(h)\dot{i}_1 - v^2 k' (L_p h + L_{120}) + L'_{12} \dot{i}_1 v = 0 \quad (5.116)$$

y

$$k(h) [L_1 \dot{i}_1 + \dot{i}_2 (L_p h + L_{120})] + L'_{12} \dot{i}_1 \dot{i}_2 - L_1 \sigma k(h) (v^2 k' + L_1 k(h) \dot{v}) - m(g + \dot{v}) = 0, \quad (5.117)$$

en correspondencia con los grados de libertad q_1 , q_2 y h respectivamente; además, teniendo en cuenta

$$\dot{i}_1 = -\dot{q}_1,$$

$$\dot{i}_2 = -\dot{q}_2$$

y

$$v = \dot{h}.$$

5.2.2. Establecimiento de la ley de control

Con las ecuaciones de movimiento controladas, se puede establecer la ley de control que rige el comportamiento estable del sistema; en este caso, también emplearemos algunos detalles de la metodología usada en la sección 5.1.4, aunque se aclara que no es nada trivial. Lograr establecer una ley de control en el Lagrangiano controlado del anillo de Thomson, es un reto alcanzado en el trabajo.

Entonces, procedemos a definir la ley de conservación del mismo modo que establecen Bloch *et al.* [3], teniendo en cuenta los momentos

$$p_{nc_{q_1}} = \frac{\partial L_{nc}}{\partial \dot{q}_1} = L_1 \dot{q}_1 + L_{12}(h) \dot{q}_2 \quad (5.118)$$

y

$$p_{c_{q_1}} = \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}_1} = L_1 \dot{q}_1 + L_{12}(h) \dot{q}_2 + L_1 \dot{h} k(h), \quad (5.119)$$

correspondientes al Lagrangiano no controlado y al Lagrangiano controlado respectivamente. Como se observa en las expresiones (5.118) y (5.119), estos momentos se definen en base a la ecuación por la cual se implementará el control, en este caso, en la ecuación de la corriente en la bobina, q_1 ; a esta ecuación, empleando el sistema no controlado se le agregará el control, traducido técnicamente como una fuente de control definida como

$$u = \frac{d}{dt} (p_{nc_{q_1}} - p_{c_{q_1}}),$$

$$u = -\frac{d}{dt} (L_1 k(h) \dot{h}). \quad (5.120)$$

Como se conoce, esta fuerza de control es la que definirá la ley de control no lineal deseada, con la cual, se conformará un nuevo sistema con el control dejando intacta a la ecuación no controlada de h . Nótese que en la expresión (5.120) es preciso hallar la función $k(h)$; este paso, como ya se ha mencionado, es definitivamente no trivial, por lo que el tratamiento que se dará en este caso, es diferente al empleado en la solución del sistema del péndulo invertido sobre el carro. Solamente seguiremos la misma metodología según la comparación de coeficientes en las ecuaciones diferenciales como proponen Bloch *et al.* [3], para efectuar luego el emparejamiento en los sistemas.

El primer detalle que tenemos es, aunque solo consideramos la dirección de simetría q_1 , por la cual pondremos el control, el sistema tiene tres grados de libertad en tres ecuaciones, esto implica incluir en el proceso de solución de $k(h)$ el uso de q_2 ; para ello, se despeja \ddot{q}_2 en la expresión (5.116) y se sustituye en la expresión (5.115), aquí, despejamos la dirección de simetría \ddot{q}_1 para obtener de esa expresión los coeficientes

$$Cc_{\ddot{h}} = -k(h) \quad (5.121)$$

y

$$Cc_{\ddot{h}^2} = \frac{k' \Upsilon + L_p k(h) (L_p h + L_{120})}{-\Upsilon}, \quad (5.122)$$

donde se emplea

$$\Upsilon = L_p^2 h^2 + 2L_p L_{120} h - L_1 L_2 + L_{120}^2.$$

Luego, realizando el emparejamiento, se sustituye la \ddot{q}_1 calculada en la expresión (4.24), de donde se obtienen los coeficientes

$$Cnc_{\ddot{h}} = k(h) L_1 \quad (5.123)$$

y

$$Cnc_{\ddot{h}^2} = \frac{L_1 \left[-k' \Upsilon - L_p k(h) (L_p h + L_{120}) \right]}{-\Upsilon}. \quad (5.124)$$

Comparando los pares de coeficientes, mediante las resta $Cc_{\ddot{h}} - Cnc_{\ddot{h}}$ y $Cc_{\ddot{h}^2} - Cnc_{\ddot{h}^2}$, se obtiene

$$k(h) = \frac{\sigma}{\sqrt{-\Upsilon}},$$

o bien,

$$k(h) = -\frac{1}{\kappa \sqrt{-\Upsilon}}, \quad (5.125)$$

considerando el mismo cambio de variable que proponen Bloch *et al.* [3] donde $\sigma = -\frac{1}{\kappa}$. Vea en la expresión (5.125) que $\Upsilon < 0$, condición que garantiza la definición de la función $k(h)$ y que seguidamente tendremos en cuenta para definir la ley de control no lineal.

Entonces, sustituyendo \ddot{q}_2 en la expresión (5.117), para luego sustituir \ddot{q}_1 y despejar de la resultante a \ddot{h} ; esta expresión y $k(h)$, definida en la expresión (5.125), se sustituyen en la expresión (5.120) para establecer finalmente la ley de control no lineal deseada

$$u = -\frac{L_1 \kappa \left[\Upsilon \dot{q}_2 L_p \dot{h} + \kappa \sqrt{-\Upsilon} (\Upsilon_A + \Upsilon_B + \Upsilon_C) \right]}{[\Upsilon (-L_1 - L_1 \kappa + m \kappa^3 \Upsilon)]}, \quad (5.126)$$

donde

$$\Upsilon_A = gm [L_1 L_2 - L_{120}^2],$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_B &= L_p \left[\dot{q}_1 \dot{q}_2 L_{12_0}^2 + L_{12_0} \left(-2mgh - m\dot{h}^2 \right) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 L_1 L_2 \right], \\ \Upsilon_C &= L_p^2 \left[\dot{q}_1 \dot{q}_2 L_p^3 h^2 - h \left(-2\dot{q}_1 \dot{q}_2 L_{12_0} + m \left(gh + \dot{h}^2 \right) \right) \right].\end{aligned}$$

Finalmente, se establece el sistema controlado

$$\begin{bmatrix} E_{q_1} + u \\ E_{q_2} \\ E_h \end{bmatrix} = 0, \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned} & -L'_{12} \dot{q}_2 \dot{h} - L_1 \ddot{q}_1 - L_{12}(h) \ddot{q}_2 \\ & + \left(-\frac{L_1 \kappa \left[\Upsilon \dot{q}_2 L_p \dot{h} + \kappa \sqrt{-\Upsilon} (\Upsilon_A + \Upsilon_B + \Upsilon_C) \right]}{[\Upsilon (-L_1 - L_1 \kappa + m \kappa^3 \Upsilon)]} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$-L'_{12} \dot{q}_1 \dot{h} - L_2 \ddot{q}_2 - L_{12}(h) \ddot{q}_1 = 0, \quad (5.129)$$

$$L'_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m \left(g - \ddot{h} \right) = 0. \quad (5.130)$$

Haciendo un análisis en la ley de control no lineal u , particularmente en sus singularidades y condiciones que garantizan la definición de la métrica, se puede establecer la condición de estabilidad

$$-\Upsilon m \kappa^3 < L_1 (\kappa + 1), \quad (5.131)$$

donde

$$\Upsilon < 0.$$

La comprobación de la expresión (5.131) permitió concluir que la aplicación de la técnica de control formalismo Lagrangianos controlados en el sistema del anillo de Thomson tiene sentido desde el punto de vista matemático. Esta expresión garantiza que el anillo levite a una altura definida en Υ , para la cual se establecerá una ganancia κ que garantice su estabilidad independientemente de la condición inicial, realizando siempre una selección adecuada de parámetros circuitales y de las propias características constructivas del sistema, por ejemplo, la correcta selección de la masa.

5.2.3. Simulación de la dinámica controlada

La simulación de la dinámica controlada se realiza a partir del sistema definido por las expresiones (5.2.2), (5.129) y (5.130) considerando los parámetros: $m = 0.07$ kg, $g = 9.81$ m/s², $L_p = 0.05$, $L_1 = L_2 = 12.5 \times 10^{-3}$ H y $L_{12_0} = 0$, de forma tal que garanticen la condición de estabilidad definida en la expresión (5.131). La fuente de corriente alterna que se le coloca a la bobina es $U(t) = U_{max} \sin(\omega t)$ V, siendo $U_{max} = 150\sqrt{2}$ V y $\omega = 3.77$ rad/s. Las condiciones iniciales consideradas son $h(0) = 0.4$ m, $v(0) = 0$, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$. En este caso se consideran elementos disipativos en las ecuaciones de movimiento no controladas; o sea, para realizar esta simulación se tuvo en cuenta un emparejamiento ya teniendo en cuenta estos términos. No obstante, Bloch *et al.* [3] hacen referencia a un tratamiento especial para colocar la disipación en el modelo del sistema.

Empleando la expresión (5.131), se selecciona una ganancia $\kappa = 50$, de forma tal que el anillo pueda levitar a una altura $h = -0.12$ m de manera estable. La simulación se realiza con un tiempo $t = 20$ s.

En la figura 5.10 se aprecia la posición, o altura controlada del anillo. Como se observa, dicha altura o punto de equilibrio en nuestro caso, alcanza un valor de $h = -0.12$ m en un tiempo aproximado $t = 15$ s. Si se compara esta figura con la obtenida en la simulación de la dinámica natural del sistema considerando una disipación por fricción con coeficiente β , figura 4.7, se aprecia la similitud en ambas; en otras palabras, el anillo es colocado a una altura de levitación deseada de tal forma que se conserva la energía en el sistema, comprobando así la acción del control.

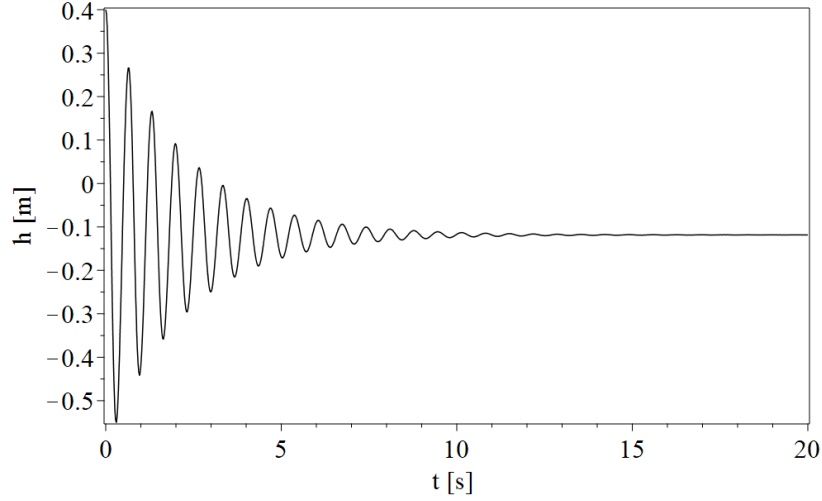


Figura 5.10: Altura controlada del anillo de Thomson.

También se estudia la corriente i_1 que circula por la bobina, cuyo comportamiento se aprecia en la figura 5.11. Puede observarse que al comienzo de la simulación, esta corriente tiene un sutil crecimiento, debido a la acción del control en la propia bobina; en la medida que avanza la simulación, se aprecia que la corriente alterna se mantiene estable en el tiempo, garantizando que el anillo permanezca en la posición deseada.

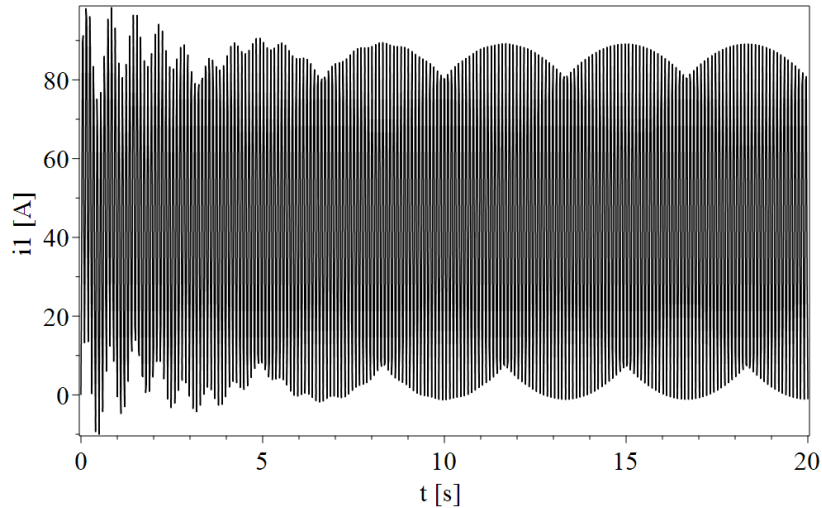


Figura 5.11: Corriente por la bobina en el sistema controlado del anillo de Thomson.

Para analizar el comportamiento del sistema en cuanto a v vs. h , mediante su correspon-

diente plano de fase, se presenta la figura 5.12, en la cual, se aprecia como el anillo mantiene una altura $h = -0.12$ m con un pequeño margen de error que puede ser despreciable; esto se ve reflejado en la velocidad que también oscila, pero como es efímero su cambio, puede considerarse que el anillo se encuentra con velocidad constante en la posición deseada. No obstante, estos ajustes pueden refinarse con la selección de κ .

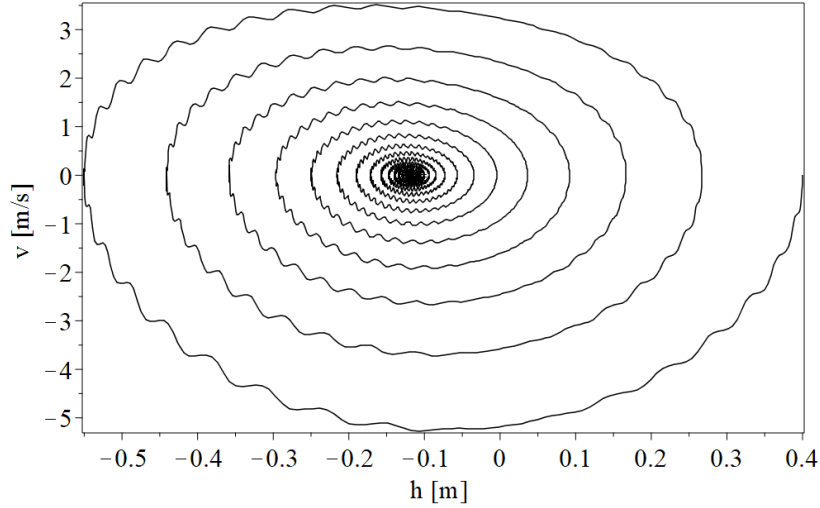


Figura 5.12: Plano de fase correspondiente al anillo de Thomson controlado.

Reajuste de κ

Si tomamos una $\kappa = 36$, vemos en la figura 5.13 que la altura del anillo logra estabilizarse con un tiempo de respuesta menor. Mientras haya mayor diferencia entre los términos de la expresión (5.131) mayor será κ y el tiempo de respuesta será menor con menos oscilaciones. La selección de κ debe satisfacer un balance entre altura deseada y reducción de oscilaciones.

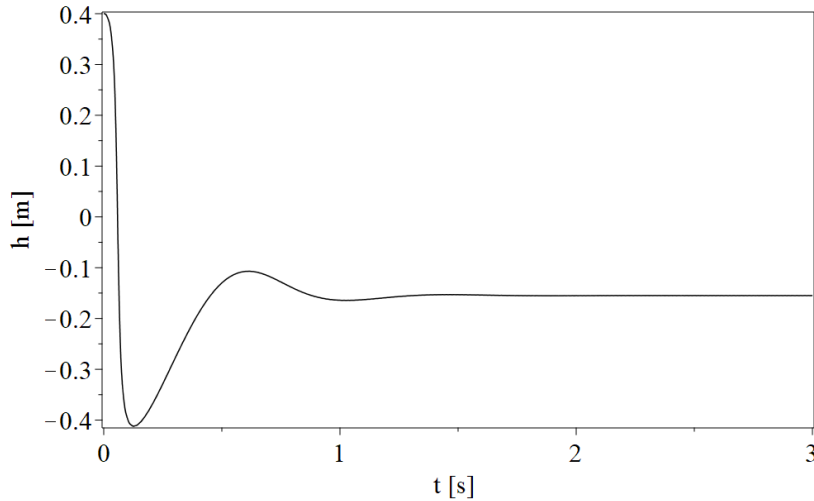


Figura 5.13: Altura controlada del anillo de Thomson teniendo en cuenta una ganancia menor.

5.2.4. Nueva factorización del espacio de configuración

Como bien se explica en la sección 5.1.2, la correcta factorización del espacio de configuración Q en correspondencia con la expresión (5.26), constituye la hipótesis central en la obtención del Lagrangiano controlado de un sistema. Esta hipótesis define la no trivialidad de este paso debido a la gran variedad de posibilidades de factorización que podría tener un sistema, mas aún, cuando se deben tener en cuenta consideraciones físicas ligadas a la selección de entradas de control y que claramente, causarían confusión si se toman en una dirección errónea dentro del haz fibrado.

Para el sistema del anillo de Thomson proponemos una factorización como se muestra en la expresión (5.87), la cual si bien es una posible forma de factorizar su correspondiente espacio de configuración, no garantiza la correcta distribución de dominios entre el espacio de formas y el grupo de simetrías. Aunque los resultados fueron satisfactorios desde el punto de control, en esta sección proponemos otra forma de factorizar el espacio de configuración, de tal suerte, que podamos dejar la acción de control solo en la dirección del grupo de simetrías (vertical) y las demás configuraciones en la dirección horizontal. Por lo tanto, la factorización que consideramos se define como

$$Q = ([h_{min}, h_{max}] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \quad (5.132)$$

donde el valor que puede tomar la altura del anillo en el intervalo $[h_{min}, h_{max}]$ y la carga eléctrica q_2 en el anillo cuyo dominio se define en \mathbb{R} (dentro del paréntesis), conforman el espacio de formas; la carga eléctrica q_1 en la bobina cuyo dominio se define en \mathbb{R} (fuera del paréntesis), indica la acción de control y por lo tanto, representa el grupo de simetrías en la factorización. Nótese la diferencia entre las expresiones (5.132) y (5.87); en la segunda, cuando desarrollamos la sección anterior se sacó arbitrariamente la carga q_2 del dominio \mathbb{R}^2 , lo cual es un error según el significado físico del sistema.

En esta sección solo se muestran los nuevos resultados teniendo en cuenta la factorización en la expresión (5.132), por lo cual, se omitirán las explicaciones que ya se han dado en aras de exponer dichos resultados de una manera más clara y consistente. Comenzamos por definir nuevamente el vector velocidad en Q que mostramos en la expresión (5.88) y que ahora con las tres componentes sería

$$v = \dot{h} \frac{\partial}{\partial h} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad (5.133)$$

aquí consideramos nuevamente que la componente $\frac{\partial}{\partial q_1}$ es la dirección vertical como se aprecia en la expresión (5.96). La 1-forma horizontal valuada en el álgebra de Lie

$$\tau_Q = \left(\tau_h(q_2, h) \dot{h} + \tau_{q_2}(q_2, h) \dot{q}_2 \right) \hat{V}, \quad (5.134)$$

permitirá nuevamente efectuar las acciones de la métrica $\mu(v, \tau_Q)$ y $\mu(\tau_Q, \tau_Q)$ que definen el Lagrangiano controlado

$$L_c = \left[T_{nc} + \left(\frac{\dot{q}_2^2 L_1 (\sigma + 1) \tau_{Q_{q_2}}^2}{2} + \dot{q}_2 \tau_{Q_{q_2}} \left(L_1 \dot{h} (\sigma + 1) \tau_{Q_h} + \hat{L} \right) + \frac{L_1 \dot{h}^2 (\sigma + 1) \tau_{Q_h}^2}{2} + \hat{L} \dot{h} \tau_{Q_h} \right) \right] - mgh, \quad (5.135)$$

donde el término T_{nc} corresponde a la energía cinética del Lagrangiano no controlado equivalente a la expresión (5.97). Las demás relaciones $\tau_{Q_h} = \tau_h(q_2, h)$, $\tau_{Q_{q_2}} = \tau_{q_2}(q_2, h)$ y $\hat{L} = L_1\dot{q}_1 + L_{12}(h)\dot{q}_2$, se emplean para facilitar la escritura.

Seguidamente se establece la entrada de control

$$u = -\frac{d}{dt}(p_{nc} - p_c),$$

$$u = -\frac{d}{dt}\left(L_1\dot{q}_2\tau_{Q_{q_2}} + L_1\dot{h}\tau_{Q_h}\right). \quad (5.136)$$

Nótese que aún tenemos las incógnitas $\tau_{Q_{q_2}}$ y τ_{Q_h} , las cuales se calculan mediante el emparejamiento entre las ecuaciones no controlada y controlada de q_1 ; se recomienda observar a detalle este procedimiento en la sección (5.2.2). Dicho esto, obtenemos las soluciones

$$\tau_{Q_{q_2}} = -\frac{L_{12}(h)}{L_1\sigma},$$

$$\tau_{Q_h} = 0, \quad (5.137)$$

las cuales, permitirán establecer finalmente la ley de control

$$u = \frac{-L_1\dot{h}L_p(L_{12}(h)\dot{q}_1 - L_2\dot{q}_2) + L_{12}(h)^2U(t)}{(\sigma - 1)L_{12}(h)^2 - L_1L_2\sigma}. \quad (5.138)$$

Se puede apreciar que la expresión (5.138) presenta menor complejidad que su homóloga expresión (5.126); esto se debe a considerar q_2 como una simetría de Noether, lo cual facilita el cálculo de las ecuaciones diferenciales del sistema, en este caso, solo se deben resolver simultáneamente las expresiones

$$\dot{i}_1 = \frac{2\dot{h}(\sigma - 1)\Upsilon L_p i_1(t) - U(t)\sigma L_2}{(-\sigma + 1)\Upsilon^2 + L_1L_2\sigma} \quad (5.139)$$

y

$$\ddot{h} = \frac{-L_p\Upsilon i_1(t)^2 - \beta\dot{h}L_2 - L_2mg}{L_2m} \quad (5.140)$$

en términos de la corriente i_1 incluyendo la fuente de voltaje $U(t)$ que se coloca en la bobina, además, considerando el coeficiente de fricción β . La variable auxiliar

$$\Upsilon = (L_p(h - h_0) + L_{12_0}), \quad (5.141)$$

contiene el parámetro h_0 que representa la altura deseada para que el sistema levite de forma estable, en otras palabras, se introduce acorde a las necesidades de operación y naturalmente con esta técnica de control se garantiza que sea un punto de equilibrio estable al menos de forma local.

En esta sección también se simula la dinámica controlada para corroborar los resultados obtenidos. Se consideran los parámetros: $m = 0.07$ kg, $g = 9.81$ m/s², $L_p = 0.005$, $L_1 = 16.6 \times 10^{-3}$ H, $L_2 = 6.2 \times 10^{-3}$ H, $L_{12_0} = 0$ y $\beta = 0.5$. La fuente de corriente alterna que se le coloca a la bobina es $U(t) = U_{max} \sin(\omega t)$ V, siendo $U_{max} = 150\sqrt{2}$ V y $\omega = 3.77$ rad/s. Las condiciones iniciales consideradas son $h(0) = 0.4$ m, $v(0) = 0$ e $i_1(0) = 0$; recordamos que la i_2 ya está implícita en la ley de control mostrada en la expresión (5.138). Se desea que el anillo levite a una altura $h_0 = 0.3$ m considerando un factor conforme $\sigma = 1 \times 10^{-7}$.

En la figura 5.14 se aprecia la posición, o altura controlada del anillo. Como se observa, dicha altura deseada o punto de equilibrio estable en nuestro caso, alcanza un valor de $h = 0.3$ m en un tiempo aproximado $t = 1$ s.

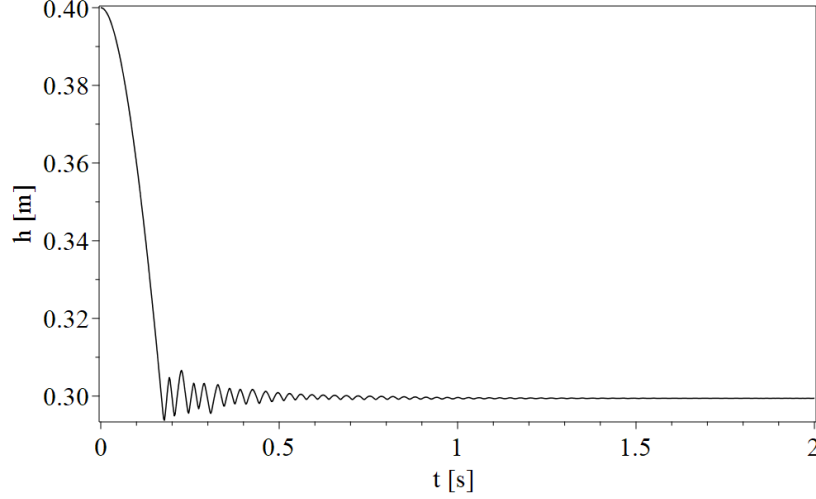


Figura 5.14: Altura controlada del anillo de Thomson considerando nueva factorización de Q .

Por otra parte, se simula el comportamiento de la corriente i_1 que circula por la bobina, el cual se aprecia en la figura 5.15. Puede observarse que durante el primer segundo de simulación la señal de corriente alcanza picos superiores a 1.2 kA, lográndose establecer en un valor aproximado de 600 A; estos valores sostenidos con fines prácticos son inaceptables, pero recordamos que estas simulaciones se realizan empleando parámetros circuitales que si bien se acercan a la realidad, no han sido calibrados en conjunto considerando valores prácticos. De esta simulación sacamos como conclusión positiva el comportamiento estable de la corriente, independientemente de su valor rms.

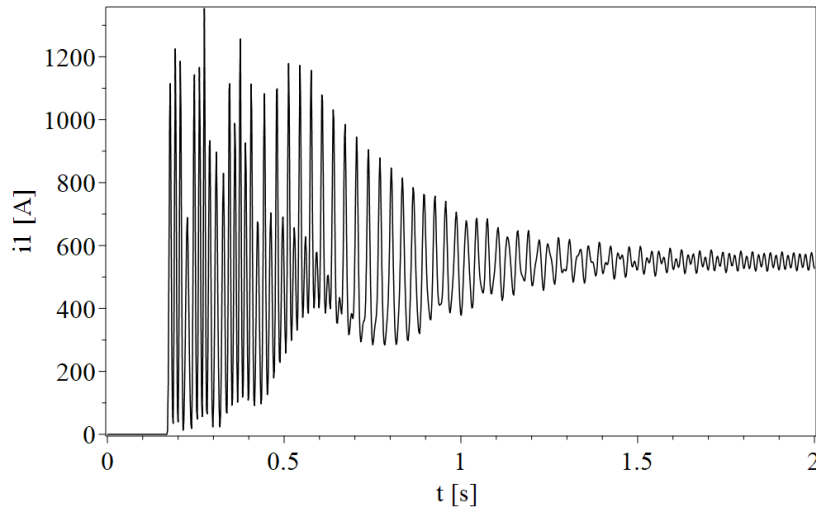


Figura 5.15: Corriente por la bobina en el sistema controlado del anillo de Thomson considerando nueva factorización de Q .

Trazando el plano de fase v vs. h mostrado en la figura 5.16, apreciamos como el anillo mantiene la altura deseada $h_0 = 0.3$ m con pequeñas variaciones en la velocidad pudiéndose considerar despreciables. Esta figura al menos a simple vista, permite observar un comportamiento estable del sistema en ausencia de una prueba formal de estabilidad.

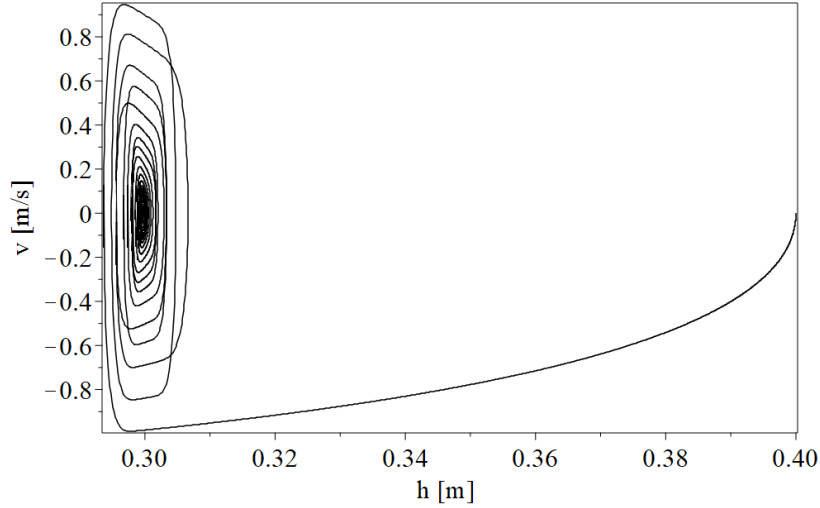


Figura 5.16: Plano de fase correspondiente al anillo de Thomson controlado considerando nueva factorización de Q .

Realizando otra simulación considerando los mismos parámetros utilizados en la primera, salvo la condición inicial de la altura que ahora la tomamos como $h(0) = 0.34$ m como se aprecia en la figura 5.17, se prueba que la ley de control es independiente a dicha condición inicial y por consiguiente, cumple con los requerimientos de la técnica de control presentada, enfocada en estabilizar el sistema en un punto deseado independientemente de la condición inicial que se proponga.

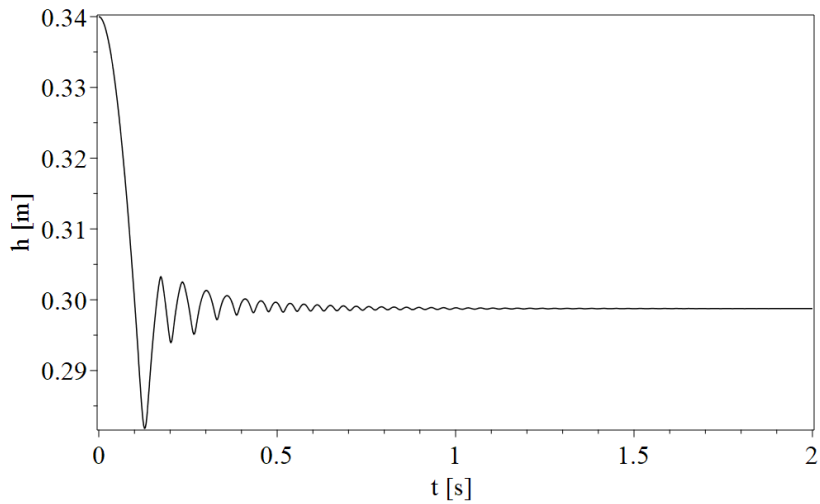


Figura 5.17: Altura controlada del anillo de Thomson considerando nueva factorización de Q y otra condición inicial.

5.3. Esfera con una bobina superior

El estudio de este sistema, desde que se analizó su dinámica natural en el capítulo 4, ha estado relacionado con el sistema del anillo de Thomson; esta similitud ocurre básicamente por tener el mismo principio de funcionamiento como sistemas de levitación magnética.

Considerando los grados de libertad q y h , que definen la carga eléctrica en la bobina y la altura de la esfera respectivamente, se construye el espacio de posibles configuraciones del sistema

$$Q = [0, h_{max}] \times \mathbb{R}, \quad (5.142)$$

mediante un producto cartesiano entre el espacio de formas $[0, h_{max}]$ y el grupo de simetrías \mathbb{R} ; en este caso, solo tenemos una sola dirección de simetría en $q \in \mathbb{R}$, lugar donde estará la acción de control. Nótese que la altura tiene un extremo en $h = 0$, el cual, representa a la esfera cuando toca la bobina, en relación con la figura 4.17. En este caso, como en el anillo de Thomson, puede ser representado de \mathbb{R}^3 como se aprecia en la figura 5.18, describiendo las direcciones infinitas que puede tomar q y las direcciones finitas que puede tomar h en el intervalo $[0, h_{max}]$, además, se incluye una curva continua y diferenciable γ que define una posible trayectoria de movimiento de la esfera de un punto p_1 a un punto p_2 . Esta curva se define en cada punto, o estado del sistema, como $\gamma(t) \Rightarrow (h(t), q(t)) \forall t$, tomando el punto $r(h(t_0), q(t_0))$ como estado inicial del sistema.

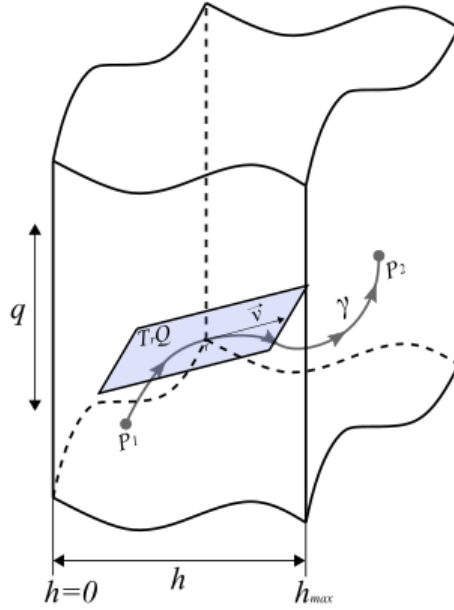


Figura 5.18: Representación del espacio de posibles configuraciones del sistema. Esfera con una bobina superior.

El vector velocidad en Q definido por

$$v = \dot{h} \frac{\partial}{\partial h} + \dot{q} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (5.143)$$

es tangente a γ en el punto $r \in Q$ dentro del plano $T_r Q$. Las componentes $\frac{\partial}{\partial h}$ y $\frac{\partial}{\partial q}$ son los vectores $\hat{e}_{(h)}$ y $\hat{e}_{(q)}$ en la dirección horizontal y vertical respectivamente; este paso ha sido

similar al presentado en el caso explicativo del péndulo invertido sobre el carro y al presentado en el caso del anillo de Thomson. Por esta razón, también se recomienda observar la figura 5.2, que define el mapeo de la función Lagrangiana en la construcción de un haz tangente donde $\dot{\gamma}$ sería en este caso la velocidad de la esfera en el espacio de estados TQ .

Como se ha podido observar a lo largo del capítulo, solo se ha considerado el estudio de la energía cinética para modificar la métrica del sistema, en este caso también seguiremos esa vertiente, siendo T la energía cinética

$$T = T_h + T_q, \quad (5.144)$$

donde

$$T_h = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.145)$$

y

$$T_q = \frac{1}{2} L_c(h) \dot{q}^2, \quad (5.146)$$

son las componentes cinéticas que corresponden a cada elemento del sistema (bobina y esfera) considerando también el acople en la expresión (5.146) mediante la función $L_c(h)$. Como solo se considera una sola dirección (vertical) en el desplazamiento de la esfera, dada por el grado de libertad h , el vector \mathbf{v} solo tendrá una componente en esa dirección, por lo tanto, no es necesario realizar una parametrización de la curva γ .

Entonces, la función de energía cinética en la expresión (5.144), puede ser expresada de forma matricial como

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{h} & \dot{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & L_c(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \dot{h} & \dot{q} \end{pmatrix} \tilde{G} \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \quad (5.147)$$

donde \tilde{G} es una matriz simétrica definida positiva con determinante distinto de cero $mL_c(h) > 0$, siendo la métrica que brinda información de la energía cinética del sistema. También puede ser escrita como producto tensorial en correspondencia con la expresión (4.59).

Empleando dicha métrica, el espacio de configuración Q se puede dividir en direcciones de simetrías, tanto horizontales como verticales. En este caso, en el parámetro $L_c(h)$ de la expresión (5.147), la altura h de la esfera no depende de q , siendo esta la simetría del sistema, la cual, en la dirección h empleando el Lagrangiano natural L

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (5.148)$$

y por lo tanto, q una dirección vertical que permite moverse en el espacio de estados TQ sin hacer cambios en el sistema. Teniendo en cuenta esta consideración, se define

$$Ver = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix}, \quad (5.149)$$

como la única dirección vertical del espacio de estados TQ . En este caso, la dirección horizontal también permitirá modificar la métrica G respetando la expresión (5.149).

5.3.1. Lagrangiano controlado del sistema

En esta sección abordaremos elementos esenciales sobre la construcción del Lagrangiano controlado del sistema; dada la similitud de este con el sistema del anillo de Thomson, pueden tomarse de forma equivalente las consideraciones presentadas en la sección 5.2.1 y tomar como apoyo, específicamente en el procedimiento detallado de los cálculos, el material presentado en la sección 5.1.2.

Entonces, empleando la energía cinética definida en la expresión (4.59), se hace un cambio de notación en términos de una métrica, o matriz de inercia μ tal que

$$T = \frac{1}{2} \mu(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

$$T = \frac{1}{2} [L_c(h) dq \otimes dq + m dh \otimes dh](\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (5.150)$$

donde el vector velocidad \mathbf{v} se corresponde con la expresión (5.143).

En este caso, también se considera la definición del espacio tangente TQ en base a una distribución en suma directa \mathfrak{D} con la dirección vertical Ver , en correspondencia con la expresión (5.99) y con la figura 5.4. Esta consideración permite asumir que

$$\mu(Ver, \mathfrak{D}) = 0. \quad (5.151)$$

Cuando se realizan los productos tensoriales correspondientes, se obtienen las componentes

$$v^H = \dot{h} \quad (5.152)$$

y

$$v^V = \dot{q}, \quad (5.153)$$

en la dirección horizontal \hat{H} y vertical \hat{V} respectivamente.

El espacio vectorial Ver genera todo el espacio tangente a la fibra en su misma dirección, por lo tanto es equivalente al espacio tangente a q (ver figura 5.4) pero solamente de la fibra G de tal forma que se corresponde con la expresión (5.55). De igual manera, también se puede emplear la expresión (5.56), que define la equivalencia con el Teorema fundamental de los grupos de Lie.

Si se considera a τ como 1-forma diferencial definida en este caso como

$$\tau(\mathbf{v}) = \tau \left(\dot{h} \frac{\partial}{\partial h} + \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

$$\tau(\mathbf{v}) = \dot{h} \tau \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) + \dot{q} \tau \left(\frac{\partial}{\partial q} \right), \quad (5.154)$$

donde $\tau = \tau_h \dot{h} + \tau_q \dot{q}$ por ser un elemento del espacio Q ; $\tau_h = \tau_h(h, q)$ y $\tau_q = \tau_q(h, q)$ son funciones. Por lo tanto,

$$\tau(\mathbf{v}) = \dot{h} \tau_h + \dot{q} \tau_q, \quad \tau(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}. \quad (5.155)$$

Entonces, si τ en la expresión (5.155) actúa en un elemento vertical, con la condición $\tau(Ver) = 0$, entonces se puede definir la 1-forma horizontal real

$$\tau = \tau_h(h, q) \dot{h}. \quad (5.156)$$

La 1-forma en la expresión (5.155) es evaluada en un álgebra de Lie \mathfrak{g} , y considerando la equivalencia en las dimensiones de \mathfrak{g} y Q , se puede emplear la expresión (5.60) para evaluar

dicha 1-forma con la base correspondiente en el álgebra de Lie, como se realizó en el caso del anillo de Thomson, garantizando que al actuar sobre un vector tangente \mathbf{v} sobre \hat{V} , pueda definirse como la expresión (5.62).

Por lo tanto, empleando la 1-forma horizontal real definida en la expresión (5.156) después de haber sido evaluada en un álgebra de Lie, se define la función

$$k(h) = \tau_h(h, q), \quad (5.157)$$

con la cual, se puede reescribir la expresión (5.63) en la sección 5.1.2 para obtener en este caso

$$\tau_Q = k(h)\dot{h}\hat{V}. \quad (5.158)$$

Nótese que coincide con la expresión (5.107), por la razón de haber considerado las mismas direcciones en el espacio de configuración. La expresión (5.158) la usaremos para determinar las acciones de la métrica

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{v}, \tau_Q) &= L_c(h)k(h)\dot{h}\dot{q}, \\ \mu(\tau_Q, \tau_Q) &= L_c(h)k(h)^2\dot{h}^2, \end{aligned} \quad (5.159)$$

donde

$$L_c(h) = \left(L_1 + L_0 e^{\frac{-h}{a}} \right).$$

Con la realización de todos estos pasos, se puede definir la componente T' que define el control dentro de la función de energía cinética en el Lagrangiano controlado

$$\begin{aligned} T' &:= \mu(\mathbf{v}, \tau_Q) + \frac{1}{2}\mu(\tau_Q, \tau_Q)\sigma, \\ T' &= \dot{q}\dot{h}k(h)L_c(h) + \frac{\dot{h}^2k(h)^2\sigma}{2}L_c(h). \end{aligned} \quad (5.160)$$

Nuevamente emplearemos la constante adimensional σ siguiendo el mismo procedimiento establecido por Bloch *et al.* [3], se recomienda observar el ejemplo explicativo donde se emplea el sistema del péndulo invertido en el carro para tener mayor claridad en el significado de K' . Entonces, con la expresión (5.160), se formula la energía cinética controlada

$$\begin{aligned} T_c &= T_{nc} + T', \\ T_c &= \frac{1}{2} \left[m\dot{h}^2 + L_c(h) \left(\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{h}k(h) + \dot{h}^2k(h)^2\sigma \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.161)$$

Como ya hemos definido anteriormente, el término T_{nc} corresponde a la energía cinética del Lagrangiano no controlado equivalente a la expresión (5.150). Con esta definición, se puede establecer finalmente el Lagrangiano controlado del sistema

$$\begin{aligned} L_c &= T_c - U, \\ L_c &= \left[\frac{1}{2} \left(m\dot{h}^2 + L_c(h) \left(\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{h}k(h) + \dot{h}^2k(h)^2\sigma \right) \right) \right] \\ &\quad + mgh, \end{aligned} \quad (5.162)$$

donde el término $U = -mgh$ corresponde a la energía potencial, la cual se deja intacta, en correspondencia con la obtenida en la sección 4.1.

Derivando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial L_c}{\partial h} = 0 \quad (5.163)$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (5.164)$$

se establecen las ecuaciones de movimiento controladas del sistema

$$\frac{1}{ae^{\frac{h}{a}}} \left[-ae^{\frac{h}{a}} \left(k' L_1 v^2 - L'_c \dot{v} + L_1 \dot{v} k(h) - L_c(h) \dot{i} \right) - L_0 \left(ak' \dot{v}^2 + k(h) (a\dot{v} - v^2) \right) \right] = 0 \quad (5.165)$$

y

$$\begin{aligned} & \left(k(h) v^2 \sigma L_1 k' + \frac{L'_c \dot{i}^2}{2} + k(h)^2 \dot{v} L_1 \sigma - k(h) \dot{i} L_1 + m (\dot{v} - g) \right) \\ & - \frac{2k(h) L_0 \left(ak' \sigma v^2 + k(h) \sigma \left(a\dot{v} - \frac{v^2}{2} \right) - a\dot{i} \right)}{2ae^{\frac{h}{a}}} = 0, \end{aligned} \quad (5.166)$$

en correspondencia con los grados de libertad q y h respectivamente; además, teniendo en cuenta

$$i = -\dot{q}$$

y

$$v = \dot{h}.$$

5.3.2. Establecimiento de la ley de control

Con las ecuaciones de movimiento controladas, se puede establecer la ley de control que rige el comportamiento estable del sistema; en este caso, también emplearemos el procedimiento descrito en la sección 5.1.4, aunque considerando las particularidades de este sistema, lo cual, no resulta trivial. El establecimiento de una ley de control en el Lagrangiano controlado de este sistema, es otro reto alcanzado en el trabajo, como a bien se mencionada en la sección 5.2.2.

Entonces, teniendo en cuenta los momentos

$$p_{ncq} = \frac{\partial L_{nc}}{\partial \dot{q}} = L_c(h) \dot{q} \quad (5.167)$$

y

$$p_{cq} = \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}} = L_c(h) \dot{q} + k(h) \dot{h} \left(L_1 + \frac{L_0}{e^{\frac{h}{a}}} \right), \quad (5.168)$$

correspondientes al Lagrangiano no controlado y al Lagrangiano controlado respectivamente. Como se aprecia en las expresiones (5.167) y (5.168), estos momentos se definen en base a la ecuación por la cual se implementará el control, en este caso, en la ecuación de la corriente en la bobina, q ; a esta ecuación, empleando el sistema no controlado, se le agregará el control, traducido técnicamente como una fuente de control, como hicimos en el estudio del anillo de Thomson, definida como

$$u = \frac{d}{dt} (p_{ncq} - p_{cq}),$$

$$u = -\frac{d}{dt} \left(k(h) \dot{h} \left(L_1 + \frac{L_0}{e^{\frac{h}{a}}} \right) \right). \quad (5.169)$$

Como se ha mencionado, esta fuerza de control es la que definirá la ley de control no lineal deseada, con la cual, se conformará un nuevo sistema con el control dejando intacta a la ecuación no controlada de h . Puede observarse que en la expresión (5.169) es preciso hallar la función $k(h)$; este paso, como ya se ha mencionado, y demostrado en el estudio del anillo de Thomson, es definitivamente no trivial, por lo que el tratamiento que se dará en este caso, es diferente al empleado en la solución del sistema del péndulo invertido sobre el carro. Seguiremos nuevamente la metodología que propone comparar los coeficientes en las ecuaciones diferenciales como establecen Bloch *et al.* [3], para efectuar luego el emparejamiento en los sistemas.

Dicho esto, se despeja \ddot{q} en la expresión (5.165) y se sustituye en la expresión (4.54), para obtener de esa expresión los coeficientes

$$Cc_{\ddot{h}} = -k(h) \quad (5.170)$$

y

$$Cc_{\dot{h}^2} = -\frac{L_0 e^{-\frac{h}{a}} \left(ak' - k(h) \right) - aL_1 k'}{aL_c(h)}, \quad (5.171)$$

Realizando el emparejamiento, se sustituye la \ddot{q} calculada en la expresión (4.54), de donde se obtienen los coeficientes

$$Cnc_{\ddot{h}} = k(h)L_c(h) \quad (5.172)$$

y

$$Cnc_{\dot{h}^2} = \frac{L_0 e^{-\frac{h}{a}} \left(ak' - k(h) \right) + aL_1 k'}{a}. \quad (5.173)$$

Comparando los pares de coeficientes, mediante las resta $Cc_{\ddot{h}} - Cnc_{\ddot{h}}$ y $Cc_{\dot{h}^2} - Cnc_{\dot{h}^2}$, se obtiene

$$k(h) = \frac{\sigma e^{\frac{h}{a}}}{L_1 e^{\frac{h}{a}} + L_0},$$

o bien,

$$k(h) = -\frac{e^{\frac{h}{a}}}{\kappa \left(L_1 e^{\frac{h}{a}} + L_0 \right)}, \quad (5.174)$$

considerando el mismo cambio de variable que propone Bloch *et al.* [3] donde $\sigma = -\frac{1}{\kappa}$; considerado también en el estudio del anillo de Thomson.

Entonces, se sustituye \ddot{q} en la expresión (5.3.1), para luego despejar de la resultante a \ddot{h} ; esta expresión y $k(h)$, definida en la expresión (5.174), se sustituyen en la expresión (5.169) para establecer finalmente la ley de control no lineal deseada

$$u = \frac{\Upsilon_N}{\Upsilon_M}, \quad (5.175)$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon_N = & aL_1^2 e^{\frac{2h}{a}} \kappa' \left[L_c' \dot{q} \Upsilon_A + 2\Upsilon_B \right] \\ & + 2L_0 \left[\frac{aL_0 \kappa^2 \left(L_c' \dot{q} \Upsilon_A + 2\Upsilon_B \right)}{2} + e^{\frac{h}{a}} \left(2L_c(h) \left(agmL_1 \kappa^3 + \frac{\dot{h}^2}{4} \right) + aL_c' L_1 \kappa^2 \dot{q} \Upsilon_A \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_M &= 2a\kappa \left[\left(L_1 e^{\frac{h}{a}} + L_0 \right) \left(e^{\frac{h}{a}} \Upsilon_C + L_0 \kappa \Upsilon_D \right) \right], \\ \Upsilon_A &= L_c(h) \kappa \dot{q} + 2\dot{h}, \\ \Upsilon_B &= L_c(h) g m \kappa, \\ \Upsilon_C &= L_c(h) (L_1 \kappa^3 m - 1) - L_1 \kappa, \\ \Upsilon_D &= L_c(h) m \kappa^2 - 1,\end{aligned}$$

Finalmente, se establece el sistema controlado de la forma

$$\begin{bmatrix} E_q + u \\ E_h \end{bmatrix} = 0, \quad (5.176)$$

mediante el cual, se hace un análisis en la ley de control no lineal u , particularmente en sus singularidades y teniendo en cuenta las condiciones que garantizan la definición de la métrica. Seguido a este, se puede establecer la condición de estabilidad

$$m\kappa^3 \left(L_1 + L_0 e^{-\frac{h}{a}} \right) < \kappa + 1, \quad (5.177)$$

donde

$$L_0, L_1, h, a > 0.$$

La comprobación de la expresión (5.177) permitió concluir que la aplicación de la técnica de control Lagrangiano controlado en el sistema de levitación magnética constituido por una esfera y una bobina superior, desde el punto de vista matemático, tiene sentido. Con esta expresión se garantiza que la esfera levite a una altura definida, para la cual, se establecerá una ganancia κ que garantice su estabilidad ante perturbaciones, realizando siempre una selección adecuada de parámetros circuitales y de las propias características constructivas del sistema, por ejemplo, la correcta selección de la masa de la esfera m y de la constante constructiva de la bobina a .

5.3.3. Simulación de la dinámica controlada

La simulación de la dinámica controlada se realiza a partir del sistema controlado definido en (5.176) considerando los parámetros: $m = 0.01$ kg, $g = 9.81$ m/s², $L_p = 0.5$, $L_1 = 0.349$ H, $L_0 = 0.229$ H y $a = 6.66 \times 10^{-3}$, de forma tal que garanticen la condición de estabilidad definida en la expresión (5.177). La fuente de corriente alterna que se le coloca a la bobina es $U(t) = U_{max} \sin(\omega t)$ V, siendo $U_{max} = 50\sqrt{2}$ V y $\omega = 3.77$ rad/s. Las condiciones iniciales consideradas son $h(0) = 0.06$ m, $v(0) = 0$ e $i(0) = 0$. En este caso nuevamente se consideran elementos disipativos en las ecuaciones de movimiento no controladas, como se puede apreciar de forma similar en el estudio del sistema del anillo de Thomson. Empleando la expresión (5.177), se selecciona una ganancia $\kappa = 50$, de forma tal que la esfera pueda levitar a una altura $h = 0.1$ m de manera estable. La simulación se realiza con un tiempo $t = 10$ s.

En la figura 5.19 se aprecia la posición controlada de la esfera. Como se observa, dicha altura alcanza un valor de $h = 0.1$ m en un tiempo aproximado $t = 8$ s; además, se aprecia que al principio de la simulación la esfera experimenta una caída con una amplitud considerable, en primera instancia, se supuso que esto tendría que ver con la ganancia κ seleccionada, y ciertamente tenía relación. Al final de esta sección, veremos un reajuste de κ que demuestra su impacto en la respuesta del control.

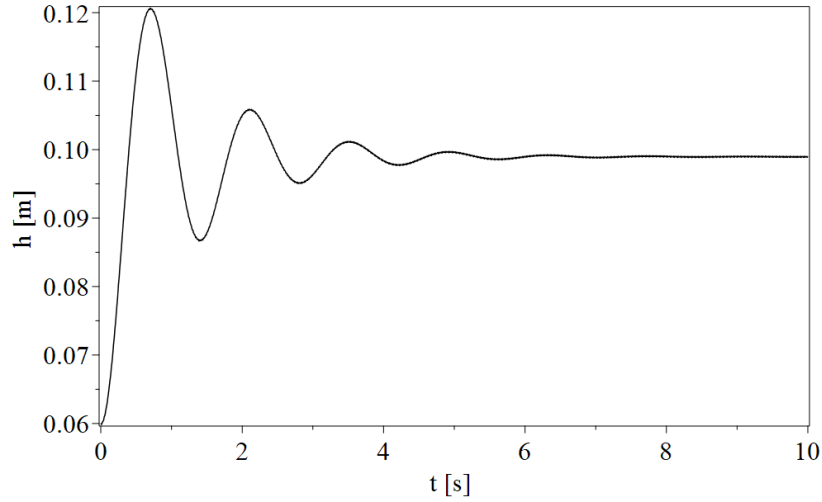


Figura 5.19: Altura controlada de la esfera.

El comportamiento de la corriente i que circula por la bobina se aprecia en la figura 5.20. Puede observarse que al comienzo de la simulación, esta corriente tiene una pequeña diferencia con respecto al resto de la onda sinusoidal; esto se debe a la acción del control en la propia bobina. Posteriormente, la onda de corriente se mantiene estable, garantizando que la esfera permanezca en la posición deseada.

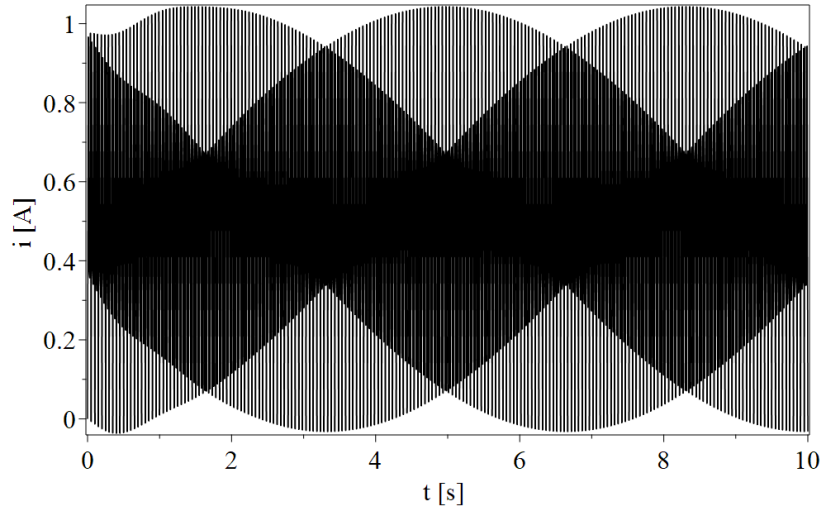


Figura 5.20: Corriente por la bobina en el sistema controlado de la esfera.

La última simulación realizada, es con el objetivo de analizar el comportamiento del sistema en cuanto a v vs. h , mediante su correspondiente plano de fase, para ello se presenta la figura 5.21, en la cual, se aprecia como la esfera mantiene una altura $h = 0.1$ m con un pequeño margen de error que puede ser despreciable; este detalle también se observó en el estudio del sistema del anillo de Thomson. La velocidad también experimenta una pequeña oscilación alrededor de ese punto, pero como es del orden de $v \pm 0.05$ m/s podría ser despreciable también. Estos detalles pueden refinarse considerando una κ más precisa.

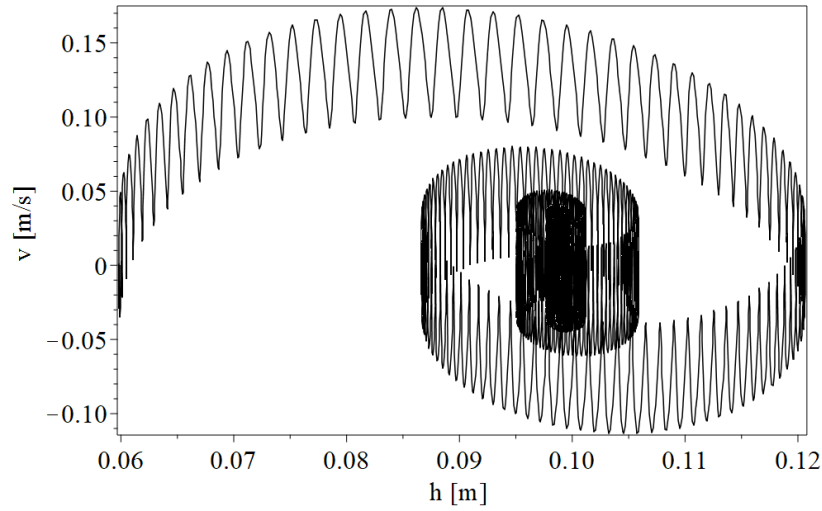


Figura 5.21: Plano de fase correspondiente a la esfera controlada.

Reajuste de κ

Si tomamos una $\kappa = 30$, vemos en la figura 5.22, que la altura de la esfera logra estabilizarse con un tiempo de establecimiento mejor, demostrando nuevamente el impacto de la selección de κ en la rapidez de respuesta del control en el sistema. Mientras haya mayor diferencia entre los términos de la expresión (5.177) mayor será κ y el tiempo de respuesta será menor; podemos ver una similitud entre este resultado y el obtenido cuando se reajustó κ en el sistema del anillo de Thomson.

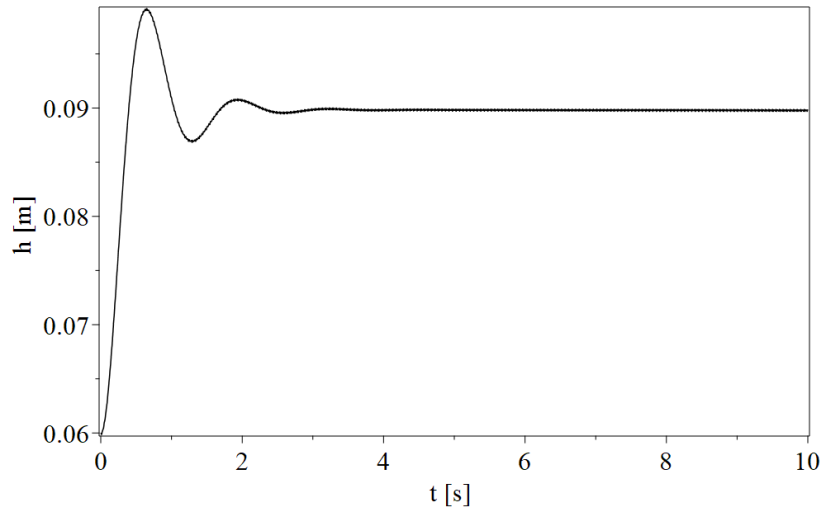


Figura 5.22: Altura controlada de la esfera teniendo en cuenta una ganancia menor.

Con este análisis, concluye el estudio del sistema controlado de la esfera con una bobina superior.

Capítulo 6.

Resumen de resultados

La investigación presentada en esta tesis tuvo como punto de partida profundizar en el trabajo presentado por Bloch *et al.* [3], con el objetivo de comprender el formalismo de Lagrangianos controlados en un sistema mecánico simple.

Explicamos una serie de elementos teóricos fundamentales que fueron de gran ayuda en la comprensión del trabajo presentado por Bloch *et al.* [3], el cual puede catalogarse como complejo desde el punto de vista matemático. En este trabajo se emplean conceptos de geometría diferencial que no son de habitual enseñanza en niveles académicos inferiores, como por ejemplo, referentes a grupos y álgebra de Lie, lo que requirió efectuar una revisión bibliográfica más profunda en la que se ocupó buena parte del tiempo destinado a la ejecución de esta investigación. Paralelo a esta actividad, se realizó un estudio sobre la identificación de funciones de energía desde el punto de vista conceptual, permitiendo establecer su significado de acuerdo a las consideraciones realizadas en futuras expresiones Lagrangianas; en este sentido, se hizo particular énfasis en el significado del acople energético en sistemas conservativos.

El estudio de sistemas mecánicos fue un ejercicio que permitió integrar conocimientos adquiridos en el transcurso de la maestría, con un enfoque particular en la construcción de sus correspondientes Lagrangianos naturales. Las consideraciones que se tomaron en cuenta para el estudio de estos sistemas mecánicos, desde el punto de vista energético incluyendo el acople, sirvieron de base para desarrollar el análisis de la dinámica natural en los sistemas de levitación magnética estudiados, por medio de una analogía que en principio, facilitó la construcción de sus expresiones Lagrangianas. El caso particular del sistema mecánico conformado por un péndulo invertido sobre un carro, sirvió como objeto de estudio en el análisis de la metodología presentada por Bloch, para el cual en dicho trabajo se presenta el formalismo de Lagrangianos controlados, y por lo tanto, fue un ejemplo que empleamos en nuestra investigación.

El principio de funcionamiento de los sistemas de levitación magnética estudiados, se analizó a partir de los conceptos elementales del electromagnetismo basados en las Ecuaciones de Maxwell. Este análisis se realizó con el objetivo central de identificar y estudiar el comportamiento de los campos magnéticos y eléctricos en dichos sistemas, permitiendo sustentar la explicación de sus dinámicas naturales conservativas una vez derivadas las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange; las dinámicas naturales fueron simuladas teniendo en cuenta, en principio, parámetros circuitales arbitrarios que no necesariamente son resultados de trabajos experimentales y tampoco se emplearon en la simulación con el fin de realizar experimento alguno en este trabajo. Las simulaciones de la dinámica propia tanto en los sistemas mecánicos como de levitación magnética, permitieron comprobar la veracidad de las expresiones Lagrangianas construidas al observarse un comportamiento conservativo no considerando términos disipativos, además, estas simulaciones son las que posteriormente se compararon con las realizadas teniendo en cuenta el formalismo de Lagrangianos controlados, esto permitió

comprobar nuevamente la veracidad de resultados obtenidos de acuerdo a lo esperado según la metodología presentada por Bloch *et al.* [3].

Para todos los sistemas estudiados en el trabajo se realizó el análisis geométrico de estabilidad, reto que al principio necesitó especial atención desde el punto de vista matemático. Estudiar la estabilidad de sistemas a partir de las propiedades de la energía cinética y potencial requiere de conocimientos previos sobre tensores de curvatura, los cuales al momento de comenzar la investigación no se tenían; por ello, se empleó como punto de partida el trabajo de López-Monsalvo *et al.* [40], tomando como material de apoyo el texto de Arnold [37]. Estos trabajos, en conjunto con otros que se consultaron en la medida de las necesidades, permitieron adquirir conocimientos y aplicarlos en el análisis, de tal forma, que para todos los sistemas se obtuvieron resultados de acuerdo a las características propias correspondientes; por ejemplo, afirmar que la cantidad de grados de libertad considerados y por ende, la dimensión del espacio de configuración donde está definida la métrica de Jacobi influye en las características del escalar de Ricci, de forma tal, que en algunos sistemas como el del péndulo simple y dos péndulos acoplados a una viga fija, no resulte satisfactorio hacer este análisis. En los sistemas de levitación magnética si se obtuvo en cada caso una curvatura de movimiento, y por consiguiente, si se hizo el análisis de signos mediante la ecuación de desviación geodésica.

Se logró comprender la metodología presentada por Bloch *et al.* [3], al menos hasta el punto de poder aplicarla a los sistemas de levitación magnética considerados. En primera instancia, en conjunto con la lectura detallada del trabajo, se desarrollaron los pasos que los autores presentan mediante el mismo ejemplo del sistema del péndulo invertido sobre un carro, pudiéndose comprobar que lo hacíamos de la forma correcta. Aplicando el mismo procedimiento estudiado y teniendo en cuenta varias particularidades de los sistemas de levitación magnética, se logró de igual forma presentar para estos el formalismo de Lagrangianos controlados. La solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales a partir de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange no es trivial, por lo cual, cada sistema tuvo que ser tratado de acuerdo a sus características propias y a las consideraciones que se tomaron desde el punto de vista circuital, estas últimas relacionadas especialmente con el “lugar” donde se coloca la entrada de control en un sistema real; en otras palabras, esta acción de control está definida en al menos una simetría del sistema, y por lo tanto, fue de suma importancia identificarlas para que el formalismo de Lagrangianos controlados tuviera sentido.

En resumen, con la realización de esta investigación se cumplió el reto que en principio era presentar el formalismo de Lagrangianos controlados en sistemas de levitación magnética. Para los dos sistemas se establecieron condiciones de estabilidad de acuerdo a características de operación consideradas, lo cual permitió que con solo hacer ajustes en un factor de proporcionalidad se lograra estabilizarlos a una altura deseada, incluso acortando el tiempo de establecimiento en la medida de las necesidades.

Capítulo 7.

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusiones

El empleo del método variacional Lagrangiano permitió obtener las ecuaciones de movimiento en los dos sistemas de levitación magnética propuestos como objeto de estudio fundamental del trabajo, además, en tres sistemas mecánicos que fueron de gran utilidad para en conjunto, realizar un satisfactorio análisis de sus características dinámicas, incluyendo un estudio del espacio de configuración en donde se definieron sus respectivos grados de libertad de acuerdo a las consideraciones realizadas.

Según los resultados que arrojó el análisis de estabilidad desde el punto de vista geométrico en sistemas de levitación magnética, se puede afirmar que la metodología garantiza una correcta conclusión de estabilidad en sistemas de los cuales se tenga información energética, siempre y cuando el grado de la métrica de Jacobi sea equivalente con las dimensiones del espacio de configuración donde está definida.

Para los dos sistemas de levitación magnética propuestos se presentó el formalismo de Lagrangianos controlados de manera satisfactoria, cumpliendo con el reto que representaba al iniciar la investigación. De acuerdo a las simulaciones realizadas, teniendo en cuenta la dinámica controlada y deseada en los sistemas, se puede concluir que al establecer una ley de control que satisfaga las condiciones de emparejamiento entre las ecuaciones de movimiento que representan la dinámica propia y la controlada, se puede garantizar la estabilidad del sistema ajustando una constante de proporcionalidad. La condición de estabilidad debe responder necesariamente a un punto de operación deseado.

Los resultados teóricos alcanzados demuestran una vez más la importancia que tienen las técnicas de control no lineal para hacer frente a problemáticas relacionadas con sistemas electromagnéticos, especialmente, mediante la aplicación de geometría diferencial. Aunque los resultados no fueron implementados desde un punto de vista práctico, precisamente por los alcances del trabajo teórico enmarcado en arduas tareas desde el punto de vista matemático, constituyen la base para futuros trabajos de esa índole.

En general, este trabajo contribuye al desarrollo de sistemas de levitación magnética desde una perspectiva novedosa, al atacar un problema de control enfocado en la regulación presentando el formalismo de Lagrangianos controlados; al menos para dos sistemas simples se garantiza su estabilidad en un punto de operación deseado. Esta técnica de control no había sido aplicada en este tipo de sistemas, por lo cual, es un trabajo pionero y sienta las bases para futuras investigaciones.

7.2. Trabajos futuros

En base a los resultados alcanzados en la investigación, los cuales desde el punto de vista teórico permitieron presentar para dos sistemas particulares de levitación magnética el formalismo Lagrangianos controlados, surge la motivación de indagar en temas afines engrandeciendo el campo de aplicaciones de la geometría diferencial en el control de sistemas electromagnéticos y electromecánicos; por ejemplo, posibles trabajos futuros podrían ser:

- Implementar los resultados teóricos de este trabajo desde un punto de vista práctico. Se recomienda en primera instancia identificar en las leyes de control propuestas las variables accesibles.
- Presentar el formalismo Lagrangianos controlados en sistemas de levitación magnética considerando el moldeo de la energía potencial. Para ello se puede considerar emplear el trabajo de Bloch *et al.* [32] como punto de partida.
- Presentar el formalismo Lagrangianos controlados en sistemas electromecánicos considerando el moldeo de la energía cinética. Para este caso sería útil emplear nuevamente el trabajo de Bloch *et al.* [3] y tomar como complemento las explicaciones y resultados presentados en este trabajo.
- Aplicar la metodología del análisis geométrico de estabilidad en sistemas electromecánicos. Sería muy útil emplear el trabajo de López-Monsalvo *et al.* [40] y el texto de Arnold [37], además, se recomienda nuevamente la revisión de los resultados de este trabajo como material de apoyo en aras de una mejor comprensión de la temática.

Referencias

- [1] A. Peijnenburg, J. Vermeulen, and J. Van Eijk, "Magnetic levitation systems compared to conventional bearing systems," *Microelectronic Engineering*, vol. 83, no. 4-9, pp. 1372–1375, 2006.
- [2] M. Weilert, D. L. Whitaker, H. Maris, and G. Seidel, "Magnetic levitation of liquid helium," *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 106, no. 1-2, pp. 101–131, 1997.
- [3] A. M. Bloch, N. E. Leonard, and J. E. Marsden, "Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. i. the first matching theorem," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 45, no. 12, pp. 2253–2270, 2000.
- [4] D. O. Woodbury, *Elihu Thomson, beloved scientist, 1853-1937: inventive genius, engineer, educator, pioneer of the electrical age*. Museum of Science, 1960.
- [5] N. Barry and R. Casey, "Elihu thomson's jumping ring in a levitated closed-loop control experiment," *IEEE Transactions on Education*, vol. 42, no. 1, pp. 72–80, 1999.
- [6] J. J. González, F. G. Montañez, V. M. J. Mondragón, and J. C. O. Galván, "Obtención y análisis del modelo dinámico del sistema de levitación magnética: Anillo de thomson," *Pistas Educativas*, vol. 35, no. 108, 2018.
- [7] A. Villanueva and F. S. Ornani, "Levitación magnética de un anillo anillo de thompson."
- [8] E. Okress, D. Wroughton, G. Comenetz, P. Brace, and J. Kelly, "Electromagnetic levitation of solid and molten metals," *Journal of applied physics*, vol. 23, no. 5, pp. 545–552, 1952.
- [9] P. Balko and D. Rosinová, "Modeling of magnetic levitation system," in *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*. IEEE, 2017, pp. 252–257.
- [10] K. A. Ali and M. Abdelati, "Magnetic levitation of iron sphere using analog pd controller," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1107, no. 1. American Institute of Physics, 2009, pp. 329–333.
- [11] D. H. Alcántara, L. A. Brooks, J. L. Castro, and E. L. Castro, "Control conmutado para un sistema de levitación magnética con atascamiento-deslizamiento," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 11, no. 3, pp. 285–294, 2014.
- [12] H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear systems*. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002, vol. 3.

- [13] J. Liceaga-Castro, D. Hernandez-Alcantara, and L. Amezquita-Brooks, "Nonlinear control of a magnetic levitation system," in *2009 Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference (CERMA)*. IEEE, 2009, pp. 391–396.
- [14] J. S. C. Beltrán, C. F. V. Ramírez, and J. S. H. Guayazan, "Comparación de un control lineal y no lineal en un levitador magnético," *Revista Ingenierías USBMed*, vol. 9, no. 1, pp. 112–118, 2018.
- [15] P. Šuster and A. Jadlovska, "Modeling and control design of magnetic levitation system," in *2012 IEEE 10th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMi)*. IEEE, 2012, pp. 295–299.
- [16] V. M. Hernández-Guzmán and R. Silva-Ortigoza, *Automatic Control with Experiments*. Springer, 2018.
- [17] H. H. Woodson and J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics: Fields, forces, and motion*. Wiley, 1968.
- [18] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez, *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer-Verlag, 1998.
- [19] G. Schweitzer, "Active magnetic bearings-chances and limitations," in *6th International Conference on Rotor Dynamics*. Citeseer, 2002, pp. 1–14.
- [20] S.-Y. Chen and F.-J. Lin, "Robust nonsingular terminal sliding-mode control for nonlinear magnetic bearing system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 3, pp. 636–643, 2010.
- [21] L. Sun, K. Zhao, and B. Kou, "An electromagnetic launcher with magnetic levitation realized based on vector control," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 1, pp. 467–470, 2009.
- [22] C. Samiappan, N. Mirnateghi, B. E. Paden, and J. F. Antaki, "Maglev apparatus for power minimization and control of artificial hearts," in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2005, pp. 5564–5569.
- [23] W. Li-Mei, J. Fu-Ying, and L. Chun-Fang, "Sliding mode control of cnc electromagnetic levitation system based on feedback linearization," in *2009 Chinese Control and Decision Conference*. IEEE, 2009, pp. 2706–2709.
- [24] P. Berkelman and M. Dzadovsky, "Extending the motion ranges of magnetic levitation for haptic interaction," in *World Haptics 2009-Third Joint EuroHaptics conference and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*. IEEE, 2009, pp. 517–522.
- [25] F. Moon, *Superconducting Levitation. Applications to bearings and magnetic transportation*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [26] J. Guzmán, F. d. J. González-Montañez, R. Escarela-Pérez, J. C. Olivares-Galván, and V. M. Jiménez-Mondragon, *Numerical Modeling of the Thomson Ring in Stationary Levitation Using FEM-Electrical Network and Newton-Raphson*. Ingeniería, investigación y tecnología, 2015, vol. 16, no. 3.

- [27] J. Lim, C.-H. Kim, J.-M. Lee, H.-s. Han, and D.-Y. Park, "Design of magnetic levitation electromagnet for high speed maglev train," in *2013 International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*. IEEE, 2013, pp. 1975–1977.
- [28] C.-A. Bojan-Dragos, A.-I. Stinean, R.-E. Precup, S. Preitl, and E. M. Petriu, "Model predictive control solution for magnetic levitation systems," in *2015 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*. IEEE, 2015, pp. 139–144.
- [29] F. Panuncio Cruz, "Control de un sistema de levitación magnética con compensación de redes neuronales," *Disertación, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional*, 2009.
- [30] C. Guerrero Tejada, M. A. González-Olvera, J. Dávila, and J. C. Fabián-Pliego, "Maglev tracking control by a state-feedback with integral action and robust velocity reconstruction," *XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA*, 2014.
- [31] K. Ishaque, Y. Saleem, S. Abdullah, M. Amjad, M. Rashid, and S. Kazi, "Modeling and control of magnetic levitation system via fuzzy logic controller," in *2011 Fourth International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*. IEEE, 2011, pp. 1–6.
- [32] A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, and J. E. Marsden, "Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. potential shaping," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 10, pp. 1556–1571, 2001.
- [33] B. Zhang and W. Huo, "Stabilization of quadrotor with air drag based on controlled lagrangians method," in *2017 Chinese Automation Congress (CAC)*. IEEE, 2017, pp. 5798–5801.
- [34] —, "Stabilizing quadrotor helicopter based on controlled lagrangians," in *Chinese Intelligent Systems Conference*. Springer, 2017, pp. 685–695.
- [35] M. Hemmasian Ettefagh, M. Naraghi, and M. Mahzoon, "Robustness of controlled lagrangian method to the structured uncertainties," *AUT Journal of Mechanical Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 61–72, 2018.
- [36] K. Kumari, A. K. Behera, and B. Bandyopadhyay, "Event-triggered sliding mode-based tracking control for uncertain euler–lagrange systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, no. 9, pp. 1228–1235, 2018.
- [37] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [38] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, 1970.
- [39] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [40] C. Lopez-Monsalvo, I. Lopez-Garcia, F. Beltran-Carbajal, and R. Escarela-Perez, "Putting gravity in control," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 831, no. 1. IOP Publishing, 2017, pp. 1–6.
- [41] R. Ortega, A. Loría, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer-Verlag London, 1998.

- [42] A. González-López, *Mecánica Teórica*. Universidad Complutense de Madrid, 2007.
- [43] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, “Classical electricity and electromagnetism,” 1962.
- [44] W. H. Foy, “Position-location solutions by taylor-series estimation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, no. 2, pp. 187–194, 1976.
- [45] S. Maximov, F. Gonzalez-Montañez, R. Escarela-Perez, J. C. Olivares-Galvan, and H. Ascencion-Mestiza, “Analytical analysis of magnetic levitation systems with harmonic voltage input,” in *Actuators*, vol. 9, no. 3. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2020, p. 82.
- [46] A. M. Lyapunov, “The general problem of motion stability,” *Annals of Mathematics Studies*, vol. 17, 1892.
- [47] A. Yahalom, J. Levitan, M. Lewkowicz, and L. Horwitz, “Lyapunov vs. geometrical stability analysis of the kepler and the restricted three body problems,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 21, pp. 2111–2117, 2011.
- [48] J. E. Marsden, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag. New York, 1999, vol. II.
- [49] J. E. Marsden *et al.*, *Lectures on mechanics*. Cambridge University Press, 1992, vol. 174.
- [50] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 17.
- [51] W. Hayt and J. Buck, *Engineering Electromagnetics*. McGraw-Hill, 2012.
- [52] G. Abramson, “Mecánica clásica.” 2018.
- [53] R. Quintero-Torres, M. Ocampo, B. Millán, J. Aragón, and G. Naumis, “Oscilaciones, armonía y simpatía,” *Revista mexicana de física E*, vol. 53, no. 1, pp. 67–81, 2007.
- [54] R. J. Blackwell, *Christiaan Huygens’ The Pendulum Clock, or, Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks*. Iowa State University Press, 1986.
- [55] R. Resnick, J. Walker, and D. Halliday, *Fundamentals of physics*. John Wiley Hoboken, 1988, vol. 1.
- [56] C. Silva and J. Farina, “7501-16 física oscilaciones mecánicas,” 2016.
- [57] D. Baleanu, A. Jajarmi, and J. H. Asad, “Classical and fractional aspects of two coupled pendulums,” 2019.
- [58] E. Melgoza and D. Rodger, “Comparison of table models of electromagnetic actuators,” *IEEE transactions on magnetics*, vol. 38, no. 2, pp. 953–956, 2002.
- [59] W. G. Hurley and W. H. Wolffe, “Electromagnetic design of a magnetic suspension system,” *IEEE Transactions on education*, vol. 40, no. 2, pp. 124–130, 1997.
- [60] H. Abolghasem, “Liapunov stability versus jacobi stability,” *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, vol. 10, no. 1, pp. 13–32, 2012.

- [61] L. Horwitz, Y. B. Zion, M. Lewkowicz, M. Schiffer, and J. Levitan, "Geometry of hamiltonian chaos," *Physical review letters*, vol. 98, no. 23, p. 234301, 2007.
- [62] P. Antonelli and I. Bucataru, "New results about the geometric invariants in kcc-theory," *An. St. Univ." Al. I. Cuza" Iasi. Mat. NS*, vol. 47, pp. 405–420, 2001.
- [63] T. Harko and V. Sabau, "Jacobi stability of the vacuum in the static spherically symmetric brane world models," *Physical Review D*, vol. 77, no. 10, p. 104009, 2008.
- [64] V. Balan and I. R. Nicola, "Berwald-moor metrics and structural stability of conformally-deformed geodesic sode." *APPS. Applied Sciences*, vol. 11, pp. 19–34, 2009.
- [65] D. Kosambi, "Observations sur le memoire precedent," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 37, p. 608, 1933.
- [66] E. Cartan, "Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes," *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 11, no. 1, p. 619, 1933.
- [67] S. Chern, "Sur la géométrie d'un système d'équations différentielles du second ordre," *Bull. Sci. Math.*, vol. 63, pp. 206–212, 1939.
- [68] E. Galina, "Conceptos básicos de álgebras de lie," *Universidad Nacional de Córdoba*, 2003.
- [69] N. Bourbaki, "Groupes et algebres de lie, ch. 4-6, hermann, paris, 1968," *MR*, vol. 39, p. 1590, 1981.
- [70] A. Sarlette, "Geometry and symmetries in coordination control," Ph.D. dissertation, Université de Liège, 2009.
- [71] M. Spivak, *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.
- [72] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [73] L. E. Spence, A. J. Insel, and S. H. Friedberg, *Elementary linear algebra*. Prentice Hall, 2000.
- [74] H. D. Young, R. A. Freedman, and A. L. Ford, *Sears and Zemansky's university physics*. Pearson education, 2006, vol. 1.
- [75] G. L. Baker, J. A. Blackburn *et al.*, *The pendulum: a case study in physics*. Oxford University Press, 2005.
- [76] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory. A Classic Reissue*. John Wiley & Sons, 2007.
- [77] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, S. D. Umans, and B. James, *Electric machinery*. McGraw-Hill New York, 2003, vol. 5.
- [78] M. Baylie, P. Ford, G. P. Mathlin, and C. Palmer, "The jumping ring experiment," *Physics Education*, vol. 44, no. 1, p. 27, 2009.
- [79] J. Wang, S. Wang, Z. Ren, M. Zhu, H. Jiang, and Q. Tang, "Levitation force of a ybacuo bulk high temperature superconductor over a ndfeb guideway," *IEEE transactions on applied superconductivity*, vol. 11, no. 1, pp. 1801–1804, 2001.

- [80] K. Riski, P. Heikkinen, H. Kajastie, J. Manninen, H. Rossi, K. Nummila, E. Frantsuz, and V. Khavinson, “Design of a superconducting magnetic levitation system,” *Proceedings of IMEKO TC3 2001*, pp. 239–246, 2001.
- [81] F. Shiota, Y. Miki, A. Namba, Y. Nezu, Y. Sakamoto, T. Morokuma, and K. Hara, “Absolute determination of the magnetic flux quantum using superconducting magnetic levitation,” *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, vol. 44, no. 2, pp. 583–586, 1995.